Wstęga Möbiusa i butelka Kleina

Wstęga Möbiusa opisana jest układem równań:

szerokość wstęgi $w := 3$

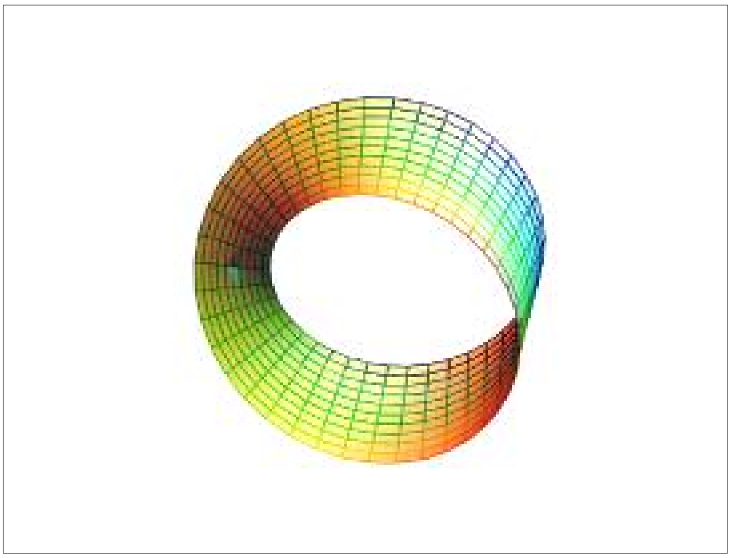
promień wstęgi $r := 2$

parametr skęcenia $a := 2$

$$x(u,v) := \left(r + \frac{v}{a}\cdot\cos\left(\frac{u}{a}\right)\right)\cdot\cos(u)$$

$$y(u,v) := \left(r + \frac{v}{a}\cdot\cos\left(\frac{u}{a}\right)\right)\cdot\sin(u)$$

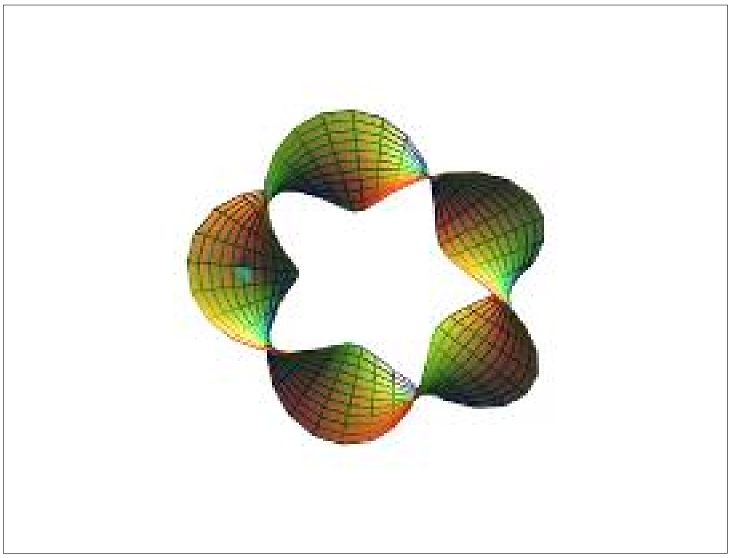
$$z(u,v) := v\cdot\sin\left(\frac{u}{a}\right)$$



(x, y, z)

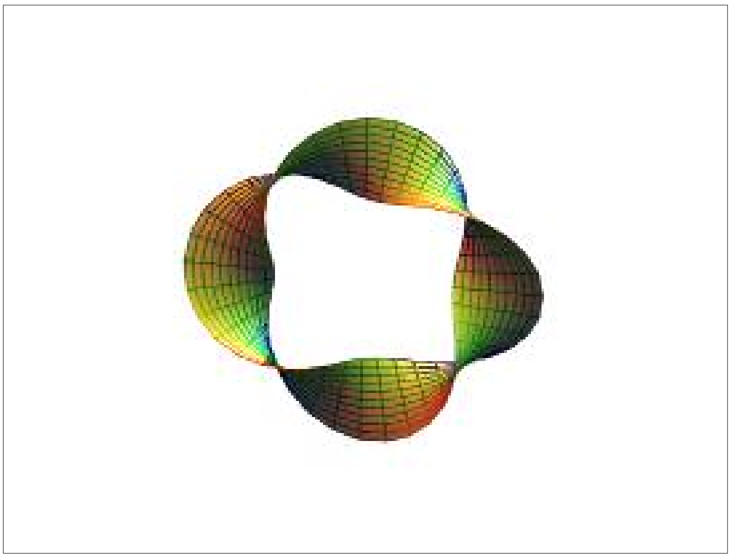
Model wstęgi można wykonać samodzielnie odpowiednio skręcając i sklejając pasek papieru. Przy parametrze skręcenia 2 (jednokrotne skręcenie) otrzymujemy najprostszą figurę jednostronną - próby pomalowania jej z obu stron zawsze skończą się fiaskiem.

Podobnie rzecz się ma dla parametru skręcenia dobranego tak aby ilość skręceń była nieparzysta. Weźmy dla przykładu a:=0.4.



(x, y, z)

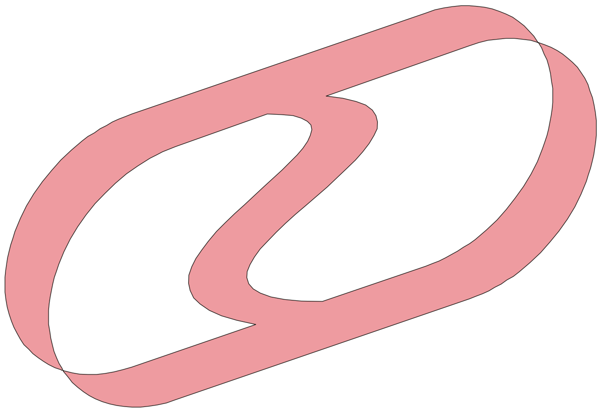
Jednak np. dla a:=0.5 sytuacja się zmienia.



(x, y, z)

Przy parzystej liczbie skręceń figura ta ma dwie strony.

Innym przykładem figury jednostronnej jest wstęga widoczna poniżej.



Własnoć jednostronności uzyskana została tutaj poprzez sprytne połączenie powierzchni zewnętrznej z wewnętrzną.

Czterowymiarową wersją wstęgi Möbiusa jest butelka Kleina. Powstaje ona poprzez sklejenie dwóch wstęg Möbiusa brzegami co skutkuje tym, iż sama brzegów nie posiada. Jak łatwo zauważyć sklejenia takiego nie sposób dokonać w przestrzeni trójwymiarowej. Aczkolwiek rzecz taka udaje się dopiero w czterwech wymiarach to jednak, jeśli nie bedziemy zbyt ortodoksyjni i pozwolimy na samoprzecięcia uda się zrealizować wersję trójwymiarową.

$i := 0..50 \qquad j := 0..50$

$x_i := i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{50} \qquad y_j := j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{50}$

$U1(x,y) := 5 \cdot \cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) + 2 \cdot (2 - \cos(x)) \cdot \cos(x) \cdot \cos(y)$

$U2(x,y) := 5 \cdot \cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) - 2 \cdot (2 - \cos(x)) \cdot \cos(y)$

$V1(x,y) := 20 \cdot \sin(x) + 2 \cdot (2 - \cos(x)) \cdot \sin(x) \cdot \cos(y)$

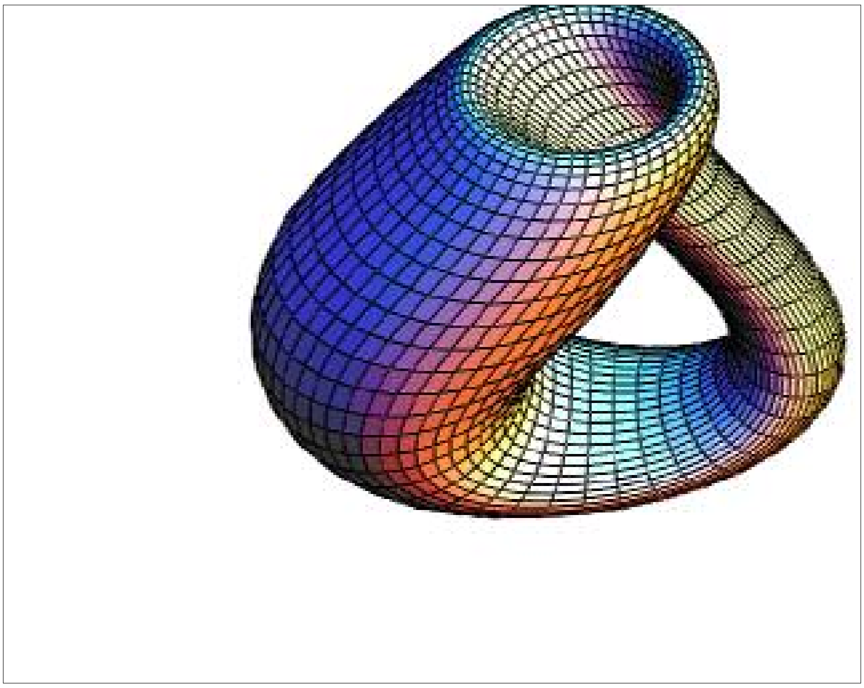
$V2(x,y) := 20 \cdot \sin(x)$

$W(x,y) := 2 \cdot (2 - \cos(x)) \cdot \sin(y)$

$X_{i,j} := \text{if}\left(x_i < \pi, U1\left(x_i, y_j\right), U2\left(x_i, y_j\right)\right)$

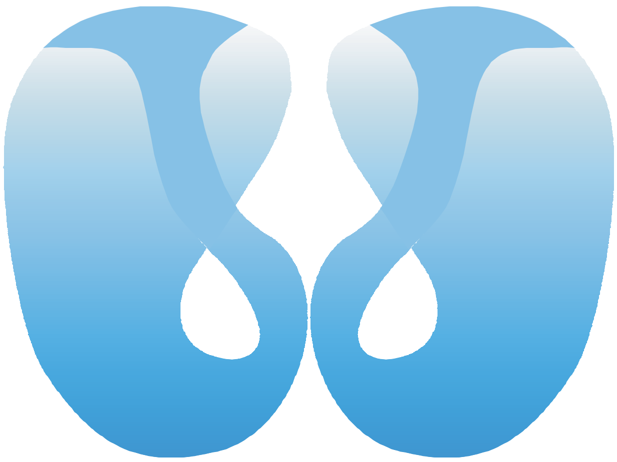
$Y_{i,j} := \text{if}\left(x_i < \pi, V1\left(x_i, y_j\right), V2\left(x_i, y_j\right)\right)$

$Z_{i,j} := W\left(x_i, y_j\right)$



(X, Y, Z)

Po odpowiednim rozcięciu butelki rozpada się ona na dwie wstęgi Möbiusa.



Ciekawe dywagacje nt. butelek Kleina powstałych ze sklejenia wstęg o większej niż 1 liczbie skręceń można znaleźć w Świecie Nauki, numer z maja 1998.

$a := 0.4 \qquad r := 6$

$$x(u,v) := \left(r + \frac{v}{a}\cdot\cos\left(\frac{u}{a}\right)\right)\cdot\cos(u)$$

$$y(u,v) := \left(r + \frac{v}{a}\cdot\cos\left(\frac{u}{a}\right)\right)\cdot\sin(u)$$

$$z(u,v) := v \cdot \sin\left(\frac{u}{a}\right)$$

$a := 0.5$ $\quad r := 6$

$$x(u,v) := \left(r + \frac{v}{a} \cdot \cos\left(\frac{u}{a}\right)\right) \cdot \cos(u)$$

$$y(u,v) := \left(r + \frac{v}{a} \cdot \cos\left(\frac{u}{a}\right)\right) \cdot \sin(u)$$

$$z(u,v) := v \cdot \sin\left(\frac{u}{a}\right)$$