i

XVI w. matematycy nie tylko nie znali liczb zespolonych ale także nie akceptowali (przynajmniej powszechnie) liczb ujemnych. Nie istniał też stosowany obecnie zapis symboliczny - zamiast niego stosowano łacińskie słowa odpowiadające działaniom. Istniały natomiast cyfry arabskie (nb. import z Indii między X a XIII w.)
Nie było kalkulatorów więc przede wszystkim liczono na palcach, węzełkach itp. gadżetach (zobacz http://www.mat.uni.torun.pl/~grusia/sl.html). Były to czasy Kopernika, zatem (poza nielicznymi heretykami) większość ludzi uważała, że Ziemia jest umieszczona w centrum Wszechświata.
Nie mniej, na samym początku tegoż wieku boloński matematyk Scipio del Ferro odkrył metodę rozwiązywania równań typu $x^3+ax=b$. Nie akceptował on liczb ujemnych i potrafił uzyskać rozwiązanie dla dodatnich a i b ponieważ w tym przypadku zawsze jeden z pierwiastków powyższego równania jest dodatni (pozostałe dwa pierwiastki ignorował*).
Autor wtajemniczył w swoje odkrycie tylko dwie osoby – zięcia i ucznia. Ów uczeń Antonio Mario Fiori stając do konkursu na stanowisko profesora na uniwersytecie w Weronie wykorzystał otrzymaną w ten sposób wiedzę przeciwko konkurentom. Konkursy polegały wtedy na wzajemnym stawianiu zadań przez kandydatów (niezłą metoda zwalczania kumoterstwa przy obsadzaniu stanowisk). Fiori był niemal pewien, że nikt nie rozwiąże jego zadań, które co do jednego sprowadzały się do przytoczonego wyżej równania. Trafił jednak na znakomitego matematyka Niccolo Fontanę (zwanego Tartaglia, co po włosku oznacza jąkałę – w istocie Fontana miał taką przypadłość), który przyparty do muru na prędce opracował metodę rozwiązywania tego typu równań i konkurs wygrał.
Rozwiązanie znalazł w ten mniej więcej sposób, że rozpisał zmienną x na różnicę dwóch zmiennych:

$$x=u-v.$$

Po rozpisaniu równania wyjściowego otrzymał:

$$u^3-v^3-3uvx=b-ax,$$

z czego wynika, że $u^3-v^3=b$ oraz $3uv=a$.

Po wstawieniu za v^3 wyrażenia $\left(\frac{a}{3u}\right)^3$ i pomnożeniu obydwu stron równania przez u^3 uzyskał $u^6-bu^3=\frac{a}{3}$, co po zastąpieniu u^3 nową zmienną z daje równanie $z^2-bz=\frac{a}{3}$, a po wstawieniu za u^3 wyrażenia $\left(\frac{a}{3v}\right)^3$ równanie $q^2+bq=\frac{a}{3}$. Problem rozwiązany, bowiem metodyka rozwiązywania równań kwadratowych była już wtedy znana.
I tu w zasadzie sprawa miałaby swój koniec gdyby nie fakt, że obok rozwiązań rzeczywistych pojawiły się także takie, które wprawiły Fontanę w zakłopotanie. Weźmy np. równanie: $x^3+2x=4$. Po zastosowaniu ww. procedury otrzymamy cztery pierwiastki:

$$u_1=\sqrt[3]{2+\frac{1}{3}\sqrt{42}},\quad u_2=\sqrt[3]{-2+\frac{1}{3}\sqrt{42}},\quad v_1=\sqrt[3]{2-\frac{1}{3}\sqrt{42}},\quad v_2=\sqrt[3]{-2-\frac{1}{3}\sqrt{42}}.$$

* Powszechnie ignorowano też ujemne rozwiązania trójmianu kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, w szczególności uznano, że gdy $b^2-4ac<0$ równanie w ogóle nie ma rozwiązań. Rozwiązanie trójmianu kwadratowego w tym przypadku umożliwiło dopiero wprowadzenie jednostki urojonej.

W dwóch przypadkach liczby pod pierwiastkiem są ujemne. Przypadki takie Fontana nazwał *casus irreducibilis* (przypadek nieprzywiedlny) i zaniechał dalszej ich analizy.

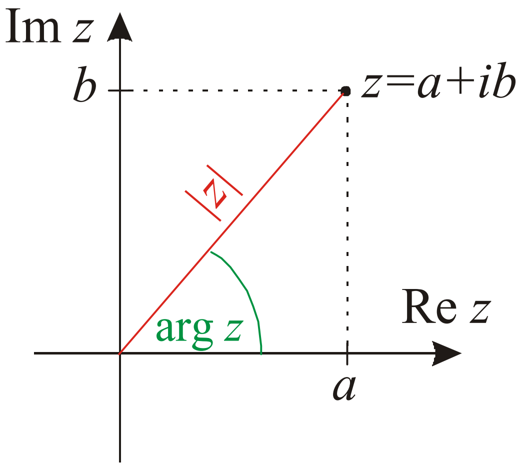
Fontana przyjaźnił się ze słynnym lekarzem, matematykiem, astrologiem* i mechanikiem Girolamo Cardano (przegub Kardana to właśnie jego pomysł). Cardano ponoć wyciągnął przepis na rozwiązywanie równań trzeciego stopnia od Fontany przysięgając jednocześnie, że nikomu go nie zdradzi**. Potem jednak go opublikował co zrodziło niesnaski między tymi znakomitymi uczonymi.
Cardano nie był aż takim matematycznym ortodoksą jak Fontana – nie odrzucał liczb ujemnych i nie przejął się też specjalnie faktem występowania ich pod pierwiastkiem. Wyrażenia typu $\sqrt{-1}$ traktował jak normalne liczby i wykonywał na nich działania.
Zauważył przy tym, że w wielu przypadkach, na skutek stosowanego podstawienia $x = u - v$ pierwiastki z liczb ujemnych ulegały redukcji i rozwiązanie stawało się rzeczywiste. Tak narodziły się liczby zespolone.
Uczeń Cardano Raffaele Bombelli zebrał wszystkie te informacje w księdze pt. „Algebra” opublikowanej w 1572 r. (tuż przed swoją śmiercią) podając przy tym podstawowe reguły działania na liczbach zespolonych. Powszechnie jednak liczb tych nie uznawano za sensowne, a rozwiązania je zawierające ignorowano.
Dopiero ok. 1777 r. Leonhard Euler wykazał ich wielką przydatność w analizie matematycznej. Temu wybitnemu matematykowi zawdzięczamy symbol i oraz określenie *„liczby zespolone”* oznaczające liczby typu:

$$z = \underbrace{a + bi}_{\text{postać algebraiczna}} = \underbrace{|a|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))}_{\text{postać trygonometryczna}} = \underbrace{|z|e^{i\arg z}}_{\text{postać wykadnicza}},$$

gdzie liczba a nazywa się częścią rzeczywistą liczby zespolonej (ozn. Re z), zaś b jej częścią urojoną (ozn. Im z).

Wyrażenie $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazywa się modułem, zaś $\arg z = \arccos\frac{a}{|z|} = \arcsin\frac{b}{|z|}$ argumentem liczby zespolonej.
Euler jest też autorem większości podstawowych wzorów dotyczących liczb zespolonych m. in. wzoru uważanego za najpiękniejszy w matematyce: $e^{i\pi} + 1 = 0$.
W XIX w. za sprawą Gaussa (interpretacja geometryczna) i Hamiltona (postać algebraiczna) nastąpił rozkwit liczb zespolonych, które otrzymały wreszcie ścisłe interpretacje stając się nieodzownym narzędziem matematyków, fizyków i inżynierów.

* Wtedy astrologię traktowano jako poważną naukę. (Dziś też niektórzy wierzą, że układ gwiazd wpływa na nasze życie, co zresztą w pewnym stopniu potwierdza fizyka – bez gwiazd nie byłoby go przecież na Ziemi – przynajmniej w znanej nam formie.) Cardano stawiając sobie samemu horoskop ustalił ponoć datę swojej śmierci i aby wykazać się kunsztem powiesił się (a wg innych źródeł zamorzył głodem – raczej mało prawdopodobne) gdy nastała wyznaczona data. Szkoda bo był bardzo płodnym twórcą i zapewne miałby jeszcze wiele do powiedzenia. Za życia opublikował ok. 200 dzieł, a ponoć przed aresztowaniem (najprawdopodobniej na skutek działania inkwizycji) osobiście spalił 120 swoich ksiąg.
** Fontana, jak na tamte czasy przystało nie wyjawił pomysłu wprost, ale za pomocą wiersza, z którego wynikało, że zmienną trzeba przedstawić za pomocą kombinacji dwóch innych zmiennych i wtedy problem da się sprowadzić do równania kwadratowego.



Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Po ustaleniu reguł działań na liczbach zespolonych odkryto szereg ich interesujących własności. Szczególnie zaskakuje fakt, że i^i daje liczbę rzeczywistą. Zgodnie ze wzorem Eulera mamy bowiem:

$$i^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2079\,.$$

Jeśli jednak utworzyć nieskończoną piramidę potęg otrzymujemy liczbę zespoloną:

$$i^{i^{i^{\cdots}}} = \frac{2i}{\pi} W\left(-\frac{\pi i}{2}\right) \approx 0.438 + i0.361\,.$$

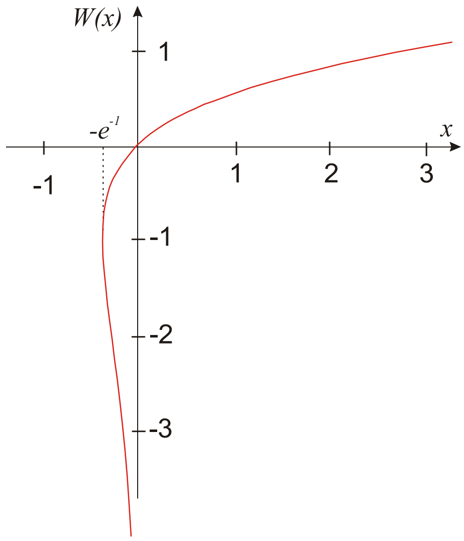
gdzie W jest funkcją Lamberta spełniającą równanie:

$$W(x)e^{W(x)} = x\,.$$

Dla dodatniego i rzeczywistego x ma ono tylko jedno rozwiązanie, zaś dla $0>x>-e^{-1}$ dwa rozwiązania ozn. W(x) i V(x). Dla $x = -e^{-1}$ $W(x)= -1$.
Liczba $W(1)$=0.56714... nazywana jest stałą omega mająca tą własność, że: $e^{-W(1)} = W(1)$ z czego wynika $\ln\frac{1}{W(1)} = W(1)$. Z tego powodu stałą tą nazywa się też stałą złotego podziału dla funkcji ekspotencjalnej.
Funkcja Lamberta pojawia się w wielu zagadnieniach fizycznych (np. przy okazji analizy promieniowania ciała doskonale czarnego) i ma kilka rozwinięć. Do prostszych należy postać:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6 + \frac{16807}{720}x^7 - \ldots$$

Czytelnikom, którzy być może zechcą sprawdzić przy wykorzystaniu powyższego szeregu ile wynosi *W(1)* należy się ostrzeżenie o wolnozbieżności powyższej formuły.



Funkcja *W(x)* (podobnie jak e^x) łatwo się całkuje i różniczkuje:

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{e^{-W(x)}}{1+W(x)}$$

$$\int W(x)dx = \left(W^2(x) - W(x) + 1\right)e^{W(x)} + C$$

$$\int xW(x)dx = \frac{1}{8}\left(2W(x)-1\right)\left(2W^2(x)+1\right)e^{2W(x)} + C$$

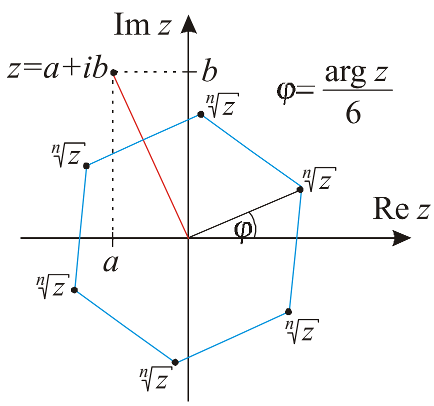
C - dowolna stała.
Wracając do i łatwo się przekonać że:

$$\sqrt{i} = \pm\frac{i+1}{\sqrt{2}}.$$

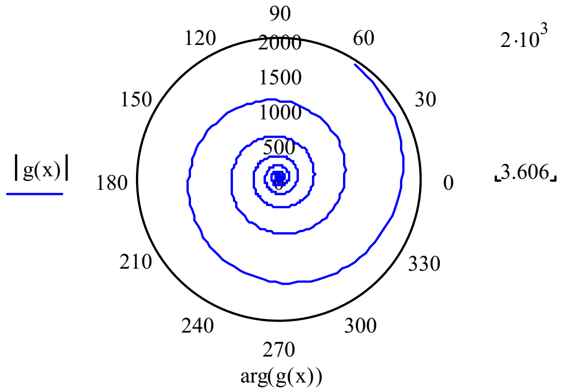
Pierwiastkowanie liczb zespolonych (podobnie jak rzeczywistych) nie jest jednoznaczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie są jednoznaczne) i w wyniku operacji pierwiastkowania n - tego stopnia uzyskuje się n różnych wartości, co wynika z okresowości funkcji *sinus* i *cosinus*.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right).$$

Wyniki pierwiastkowania n - tego stopnia liczby zespolonej, w interpretacji geometrycznej, są wierzchołkami n-kąta foremnego o środku w biegunie.

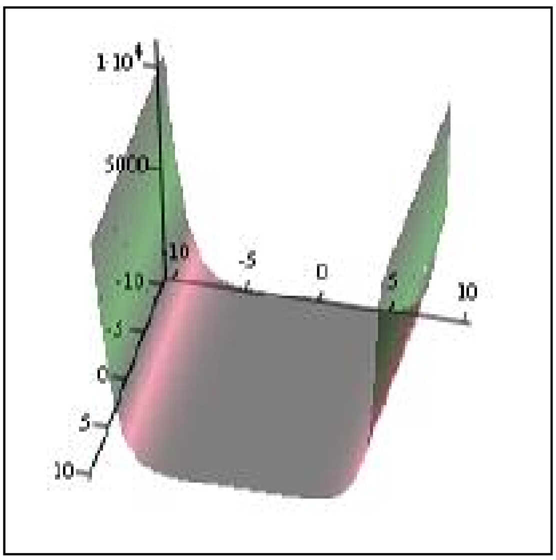


Posługując się geometryczną interpretacją liczb zespolonych szczególnie łatwo jest opisywać krzywe na płaszczyźnie. Dla przykładu funkcja $g(x) = a \cdot e^{bx}$ opisuje spiralę logarytmiczną jeśli a i b są zespolone.

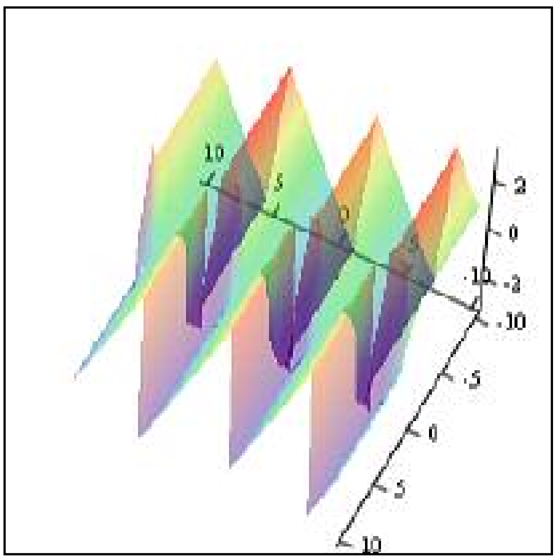


Spirala logarytmiczna $g(x) = (2+3i)e^{(1+10i)x}$.

W wojsku mawia się, że w warunkach bojowych $sin\alpha$ może przybierać dowolne wartości. Nie trzeba jednak warunków bojowych żeby zauważyć, że dla zespolonego α tak właśnie jest. Poniższe wykresy ilustrują moduł i argument *sin*(*a*+*ib*) dla a i b zmieniających się w przedziale (-10, 10).



M



A

W celu podkreślenia specyfiki warunków bojowych przytoczone powiedzenie trzeba koniecznie uzupełnić dodając, że działa ono w dziedzinie liczb rzeczywistych.