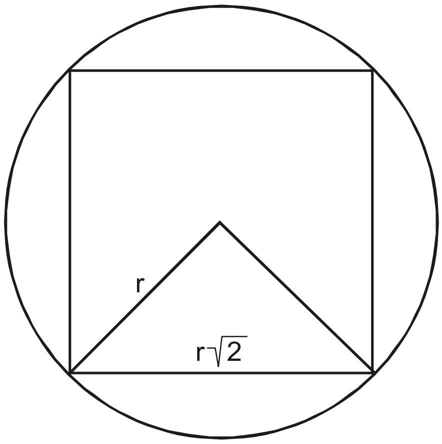
H i p e r f i g u r y (MathCad 2000)

Rozważmy kwadrat wpisany w koło.



Nic szczególnego. Na "oko" widać, że pole kwadratu jest mniejsze od pola koła.

Jelśli: $r := 1$ [m]

Pole koła: $Skola := \pi \cdot r^2$ $Skola = 3.142$ [m2]

Pole kwadratu: $Skwadratu := (r \cdot \sqrt{2})^2$ $Skwadratu = 2$ [m2]

W trzech wymiarach będzie podobnie (tym razem sześcian wpisany jest w kulę).

Objętoć kuli: $Vkuli := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $Vkuli = 4.189$ [m3]

Objętoć sześcianu: $Vszescianu := (r \cdot \sqrt{2})^3$ $Vszescianu = 2.828$ [m3]

Co będzie w kolejnych wymiarach?

Hiperobjętoć hiperkuli* n-wymiarowej oblicza się ze wzoru:

$$HVkuli(n) := \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot r^n}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2} \cdot n\right)}$$

gdzie $\Gamma(n) := \int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t}\, dt$ jest gammą Eulera

W 4 wymiarach $HVkuli(4) = 4.935$ [m4] itd.

Dużo łatwiej jest obliczyć hiperobjętoć hipersześcianu, ponieważ będzie ona rosła z trzecią potęgą:

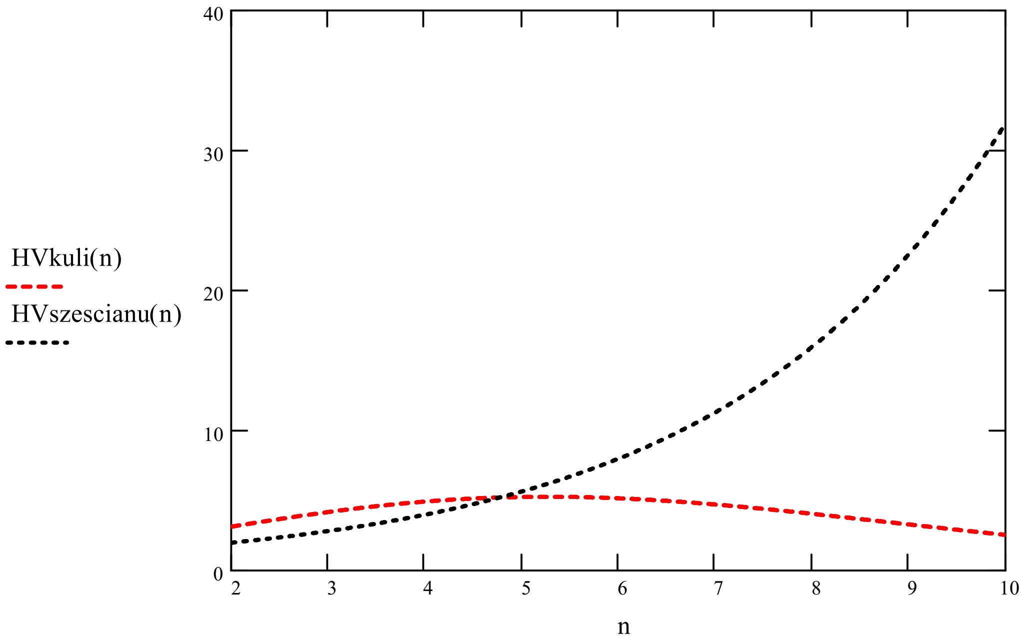
$$\mathrm{HVszescianu}(n) := (r\cdot\sqrt{2})^{n}$$

W 4 wymiarach $\mathrm{HVszescianu}(4) = 4$ [m4]

Bokami takiego hipersześcianu w czterech wymiarach będą zwykłe sześciany. Wszystko w porządku?

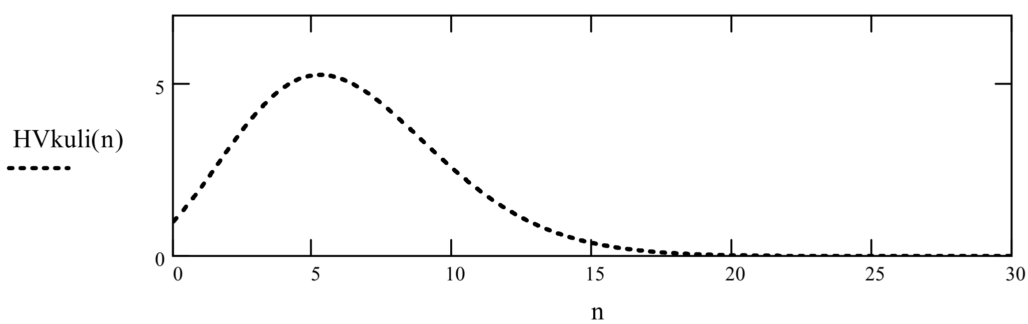
W piątym wymiarze: $\mathrm{HVkuli}(5) = 5.264$ [m5] $\mathrm{HVszescianu}(5) = 5.657$ [m5]

Hiersześcian w pięcu wymiarach ma hiperobjętość większą od hiperkuli mimo tego, że jest w nią wpisany!



Z hiperkulą dzieje się coś niedobrego! $\mathrm{HVkuli}(55) = 0$ m55] (w przybliżeniu)

Asymptotycznie kurczy się ona do zera!



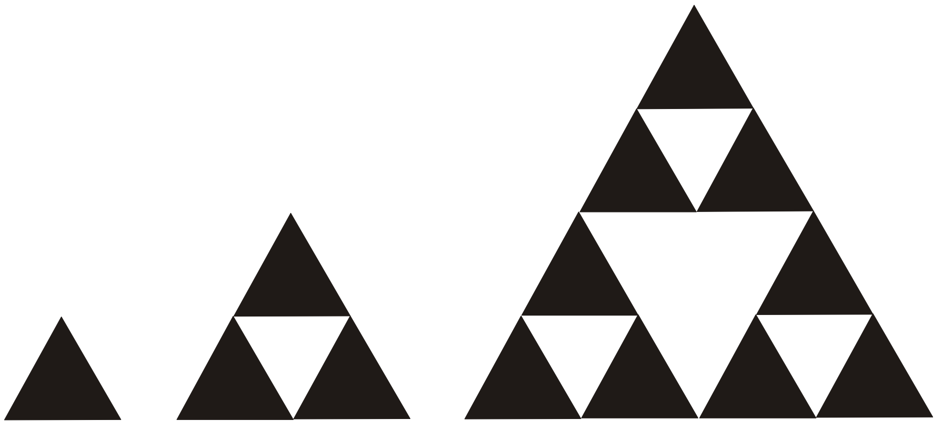
Za to hiperobjętość hipersześcianu rośnie do nieskończoności.

Jeli kogoś niepokoi fakt, że można obliczyć hiperobjętość hiperkuli np. w 4,5 - wymiarze:

$$\mathrm{HVkuli}(4.5) = 5.154$$

Niech się nie przejmuje. Matematyka zna dobrze takie dziwaczne twory.

Dla przykładu weźmy uszczelkę Sierpińskiego. Konstruuje się ją z trójkątów w sposób pokazany poniżej:



Każdy trójkąt ma bok $L := 1$, masę $M := 1$ i gęstość zdefiniowaną następująco:

$\rho(L) := \dfrac{M}{L^2}$ (równą stosunkowi pola zajętego przez pełne trójkąty do pola całej uszczelki)

Tak więc dla trójkąta po lewej:

$L := 1$ $M := 1$ $\rho(1) = 1$ ogólnie $L := 2^0$ $M := 3^0$ $\rho(L) := \left(\dfrac{3}{4}\right)^0$

Dla trzech trójkątów w środku:

$L := 2$ $M := 3$ $\rho(2) = 0.75$ ogólnie $L := 2^1$ $M := 3^1$ $\rho(L) := \left(\dfrac{3}{4}\right)^1$

Dla dziewięciu trójkątów po prawej:

$L := 4$ $M := 9$ $\rho(4) = 0.75$ ogólnie $L := 2^2$ $M := 3^2$ $\rho(L) := \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

Po n krokach iteracji:

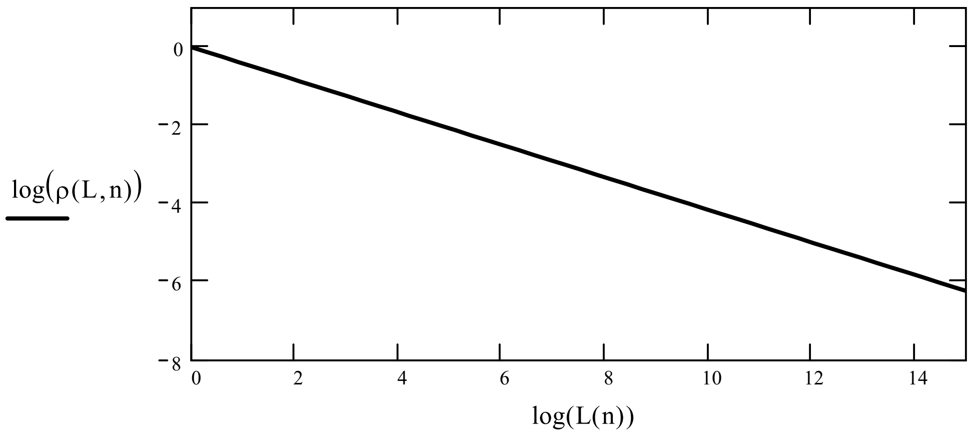
$$L(n) := 2^n \qquad M(n) := 3^n \qquad \rho(L,n) := \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

W ten sposób można uzyskać obiekt o dowolnie małej gęstości.

Ile ten obiekt ma wymiarów? Dwa? Raczej nie.

Wykreślmy następującą charakterystykę:

$$n := 0..50$$



Charakterystyka ta uwidacznie ciekawy związek między gęstością, a długością krawędzi uszczelki Sierpińskiego. Logarytmy tych wielkości jak widać są liniowo od siebie zależne. Zatem:

$$\log(\rho(L,n)) = \alpha \cdot \log(L(n))$$

Z tego wynika:

$$\rho(L,n) = L^{\alpha}$$

$\alpha := \dfrac{\log(3)}{\log(2)} - 2$ jest nachyleniem charakterystyki

Objętoć V figur geometrycznych zwykle liniowo zależy od: L^m

gdzie m jest wymiarem figury. Gęstosc zaś jest zwykle niezmienna.

$\rho = \dfrac{M}{V} = A$ Zatem: $M = A \cdot L^m$

W przypadku uszczelki amplituda wynosi 1, a gęstość maleje. Zatem:

$$\rho(L,n) = \frac{M(L,n)}{L(n)^2} = \frac{L(n)^m}{L(n)^2} = L(n)^{m-2} = L(n)^{\alpha}$$

Równość będzie spełniona dla:

$$m - 2 = \alpha$$

Z tego: $$m := \frac{\log(3)}{\log(2)} \qquad m = 1.585$$

Uszczelka Sierpińskiego nie jest więc figurą ani jedno ani dwu wymiarową - ma wymiar pośredni równy 1,585.. Na tej samej zasadzie można zbudować uszczelkę w wyższych wymiarach układając piramidy, a dalej hiperpiramidy. Za każdym razem uzyskuje się wymiary pośrednie.

---

* Ze względu na brak nazewnictwa obiektów w przestrzeni więcej niż 3 wymiarowej zwykle w celu ich nazwania używa się przedrostka "hiper". Pewnym wyjątkiem jest przestrzeń 4 wymiarowa, w której obiektom nadano nazwy. Czterowymiarowy sześcian nazwano tesseraktem, zaś czterowymiarową kulę gongylem albo glomem. Listę nazw można znaleźć pod adresem:

http://www.alkaline.org/4thdim/glossary.htm

Tesserakt można obejrzeć pod adresem:

http://www1.tip.nl/~t515027/hypercube.html