

PODSTAWY AKUSTYKI

wykład autorski

ppłk dr inż. Mateusz PASTERNAK

bud. 61 p. 25, tel. 683-76-67

mpasternak@wat.edu.pl

[http:// strony.aster.pl/mpasternak](http://strony.aster.pl/mpasternak)

konsultacje: czwartki

oraz poprzez dostępne media elektroniczne

Zaliczenie przedmiotu na podstawie:

- pozytywnego wyniku kolokwium końcowego z zakresu teorii i ćwiczeń rachunkowych
- zaliczenia ćwiczeń laboratoryjnych

Program przedmiotu:

30 godz. w tym

18 godz. wykładów

6 godz. ćwiczeń rachunkowych

6 godz. ćwiczeń laboratoryjnych

3 pkt. ECTS

ZAŁOŻENIA I CELE PRZEDMIOTU

Zapoznać z podstawowymi zagadnieniami akustyki technicznej, urządzeniami elektronicznymi działającymi z wykorzystaniem zjawisk akustycznych w różnych ośrodkach oraz ich podstawowymi aplikacjami

Treści programowe przedmiotu (SYLABUS)

lp	temat/tematyka zajęć	liczba godzin				
		wykl.	ćwicz.	lab.	proj.	semin.
1.	Podstawowe pojęcia związane z fizyką fal dźwiękowych. Techniczne zastosowania dźwięku	2				
2.	Równania fali dźwiękowej i ich podstawowe własności	2				
3.	Fale sprężyste w ciałach w gazach, cieczech i ciałach stałych	4				
4.	Wzbudzanie i detekcja fal akustycznych w gazach	2				
5.	Wzbudzanie i detekcja akustycznych fal objętościowych w cieczech i ciałach stałych	2				
6.	Wzbudzanie i detekcja fal powierzchniowych. Podstawy teorii przetworników międzypolezastych	2				
7.	Podstawowe przyrządy akustoelektroniczne i ich zastosowania	4				
8.	Obliczanie parametrów układów drgających		2			
9.	Propagacja fal dźwiękowych		2			
10.	Obliczanie geometrii prostych układów akustycznych		2			
11.	Badanie zjawiska piezoelektrycznego			2		
12.	Pomiar podstawowych parametrów filtrów akustoelektronicznych			2		
13.	Badanie linii dyspersyjnych z akustyczną falą powierzchniową			2		
Razem		18	6	6		

LITERATURA

podstawowa:

A. Arnau, Piezoelectric Transducers and Applications, Springer 2008.

D. Morgan, Surface Acoustic Wave Filters, Elsevier 2007

uzupełniająca:

T. D. Rossing ed., Springer Handbook of Acoustics, Springer 2007

A. Arnau, Piezoelectric Transducers and Applications, Springer 2008.

W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing, Piezoelectricity Evolution and Future of a Technology, Springer 2008.

W. Soluch (red.), Wstęp do piezoelektroniki, 1980

A. Śliwiński, Ultradźwięki i ich zastosowania, 2001

Z. Jagodziński, Przetworniki ultradźwiękowe, 1997

A. Kawalec, M. Pasternak, Podstawy Akustoelektroniki, e-skrypt

G. Kino, Acoustic Waves : Devised Imaging & Analog Signal, 1987

Informacje wstępne

Podstawowe pojęcia związane z fizyką fal dźwiękowych
Techniczne zastosowania dźwięku

Akustyka (gr. ακουστική - dotyczący słuchu) – dział fizyki i techniki obejmujący zjawiska związane z powstawaniem, propagacją i oddziaływaniem fal mechanicznych

Podstawowe działy akustyki:

akustyka fizyczna

(liniowa i nieliniowa, molekularna i kwantowa, akustooptyka/optoakustyka/)

geoakustyka

(podwodna, morza, atmosfery, hydroakustyka, astroakustyka)

akustyka słuchu

(psychoakustyka, a. fizjologiczna)

akustyka foniczna

(a. mowy, a. muzyczna, a. cybernetyczna, elektroakustyka, a. wnętrz

=> a. architektoniczna, a. budowlana, a. urbanistyczna, a. środowiska)

akustyka ultradźwięków

akustyka infradźwięków

akustyka przemysłowa - wibroakustyka

akustyka okrętowa

bioakustyka

akustyka biomedyczna

akustyka kryminalna

(fonoskopia, identyfikacja mowy, weryfikacja autentyczności nagrań,

identyfikacja zarejestrowanych zdarzeń akustycznych

ELEKTRONIKA WSPÓŁCZESNA

ELEKTRONIKA ANALOGOWA

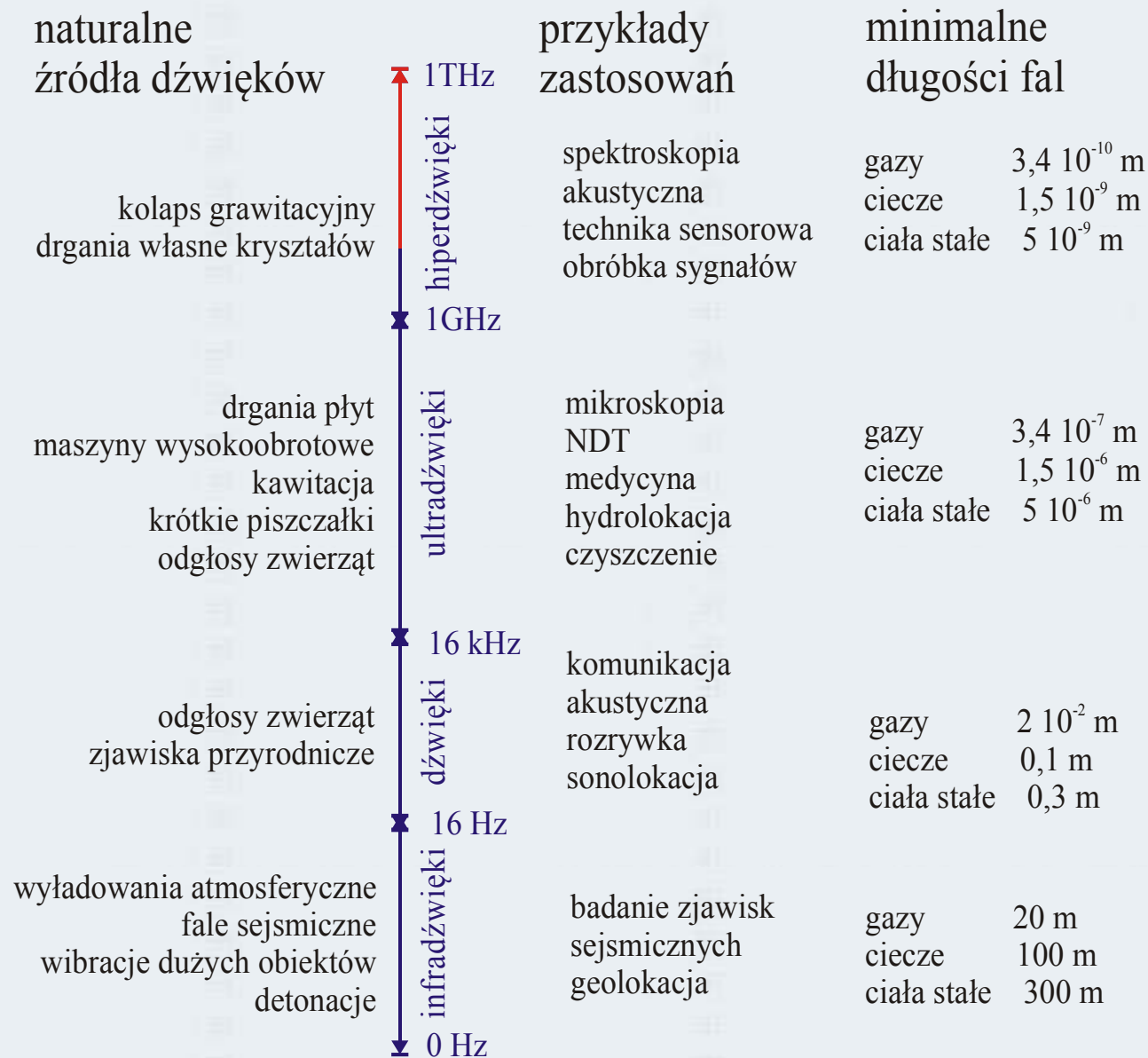
ELEKTRONIKA CYFROWA

TECHNIKA MIKROFAL

OPTOELEKTRONIKA

AKUSTOELEKTRONIKA

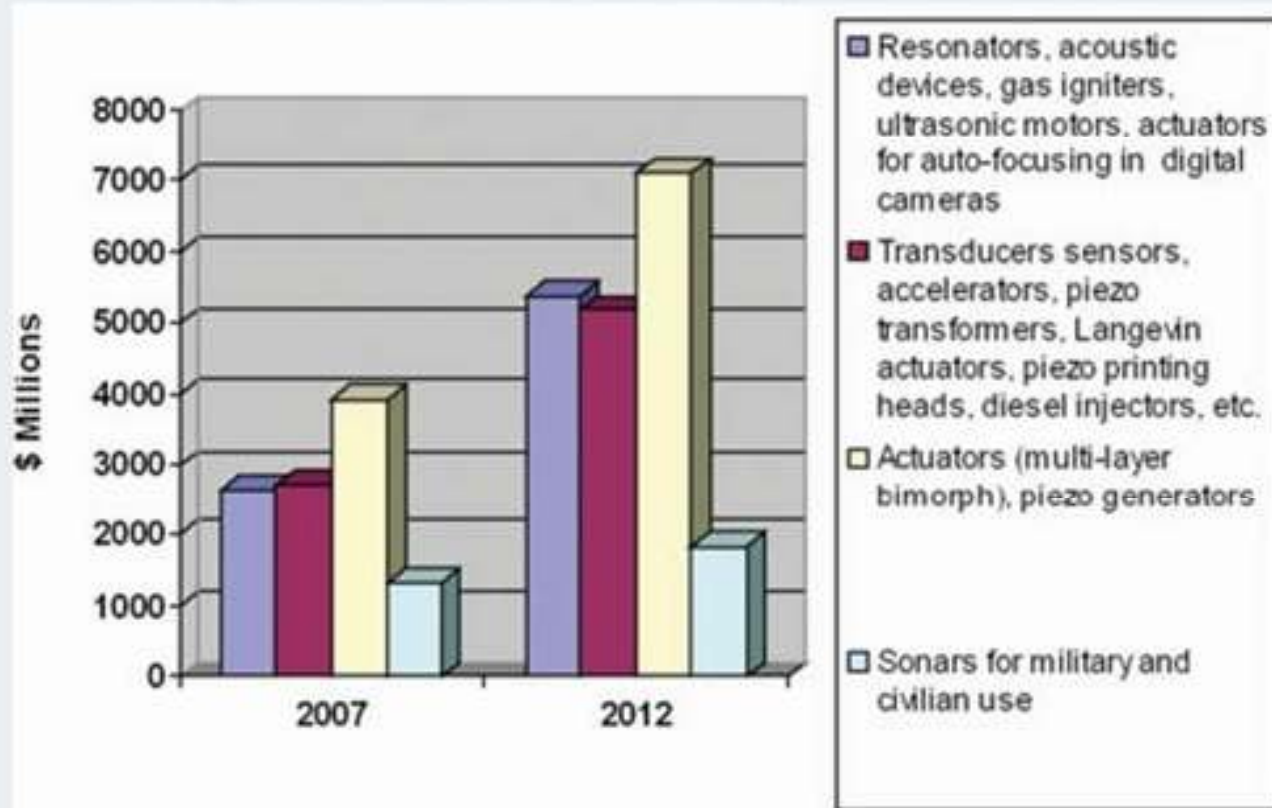
ELEKTRONIKA KWANTOWA



ZASTOSOWANIA AKUSTOELEKTRONIKI

- Akustolokacja
- Przetwarzanie sygnałów złożonych
- Filtracja (także dopasowana)
- Generacja sygnałów złożonych
- Stabilizacja drgań
- Sensory
- Zdalna identyfikacja



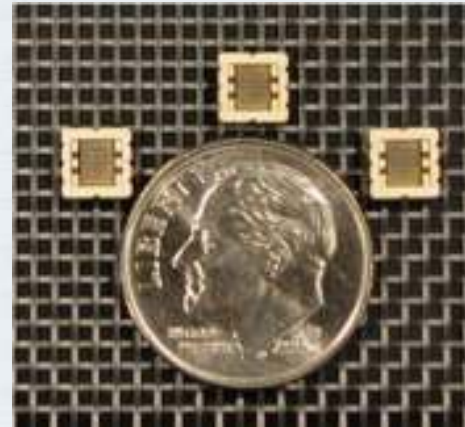


source: iRAP Inc.

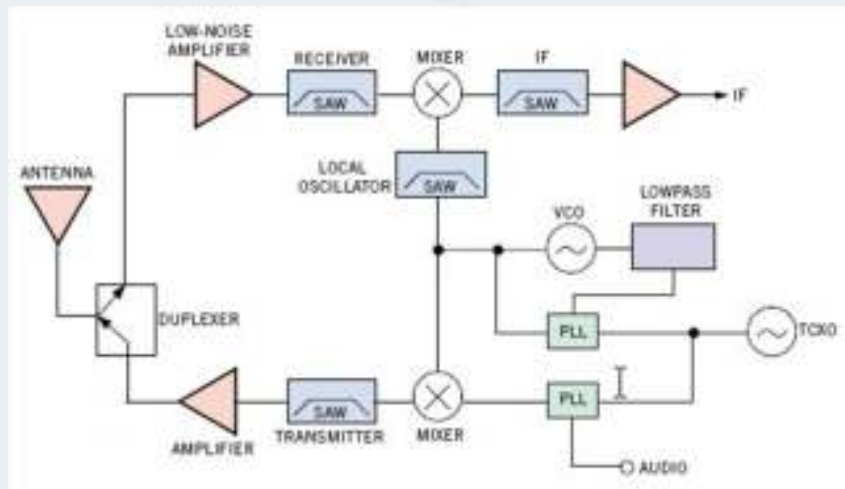
Specjalne zastosowania akustoelektroniki



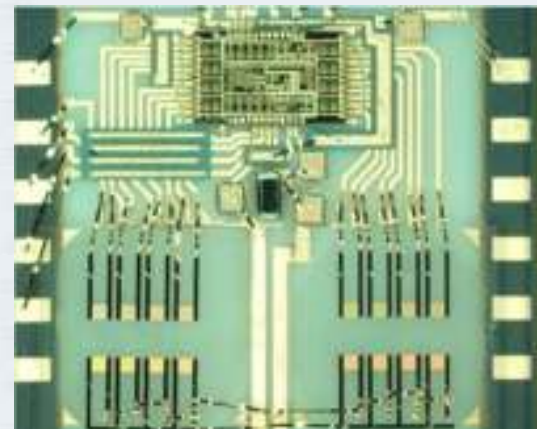
telekomunikacja przewodowa



zdalna identyfikacja i detekcja



radiokomunikacja



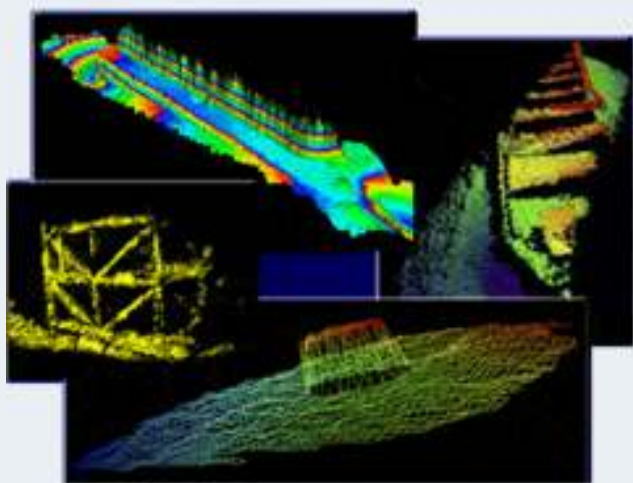
detekcja wielkości nieelektrycznych



zero-power radio



panele dotykowe

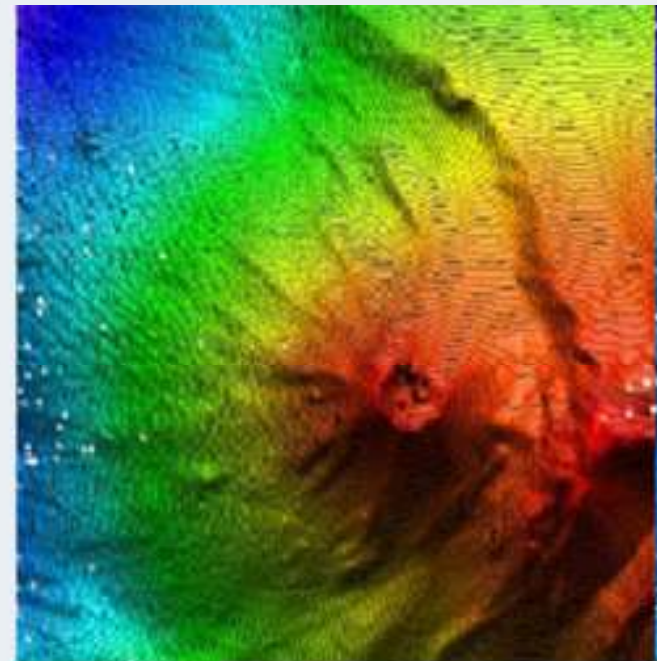
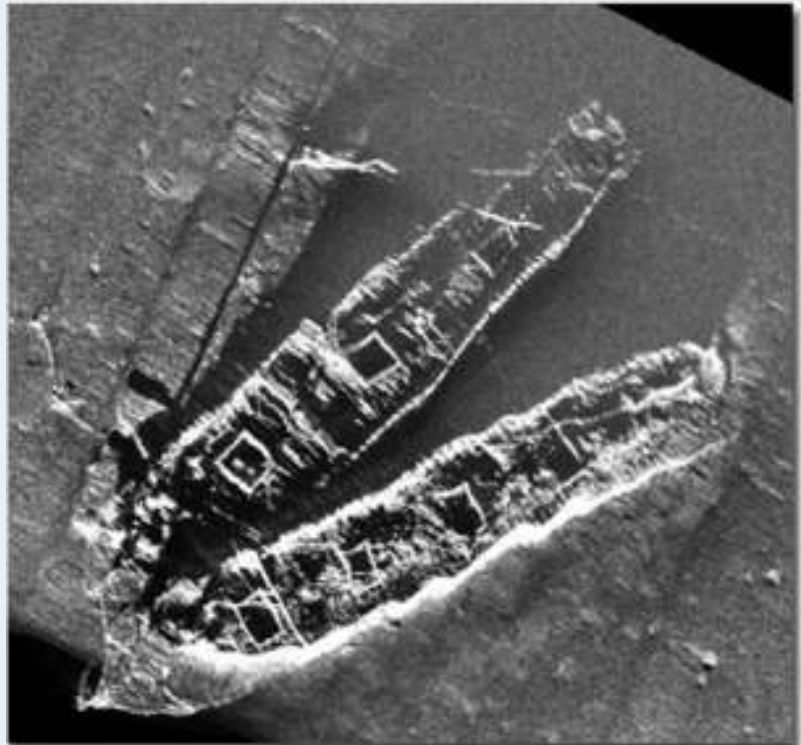
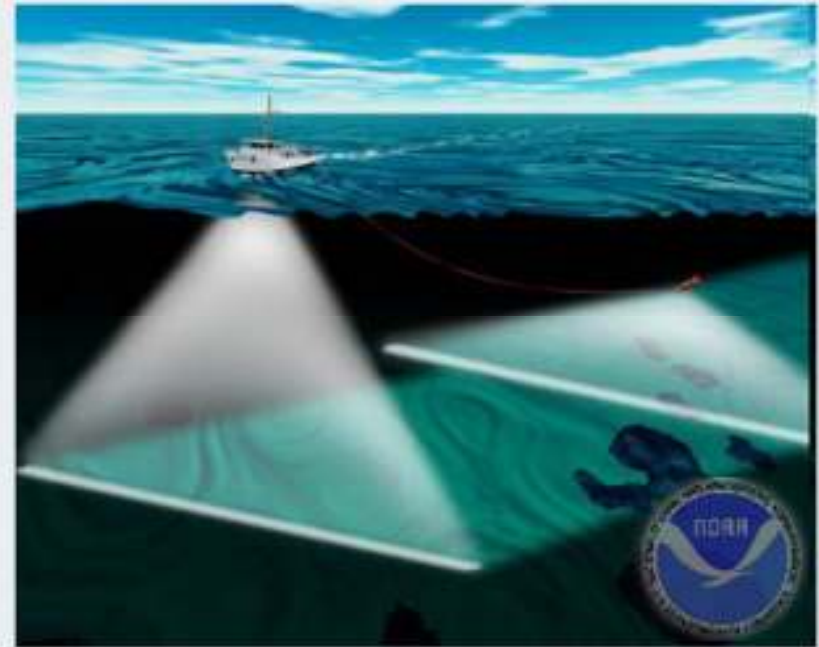


zobrazowanie akustyczne (NDT/NDE)



mini żyroskopy

SONARY



Samozasilająca się elektronika

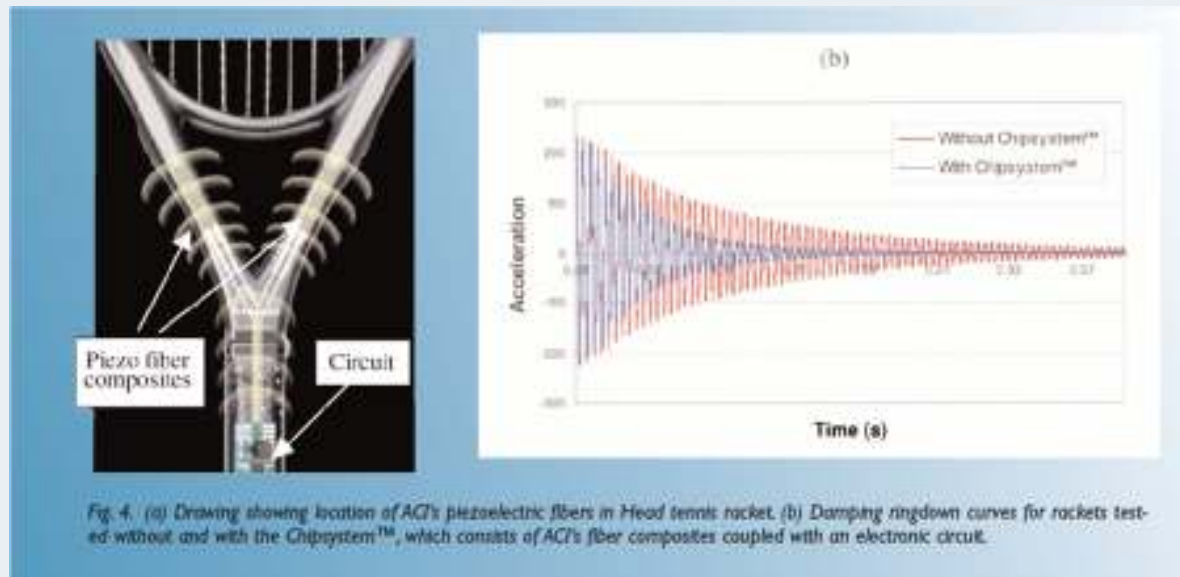
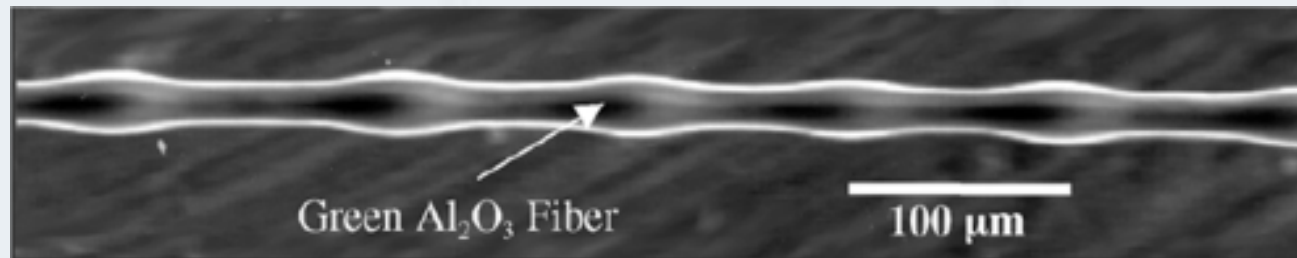


Fig. 3. Andre Agassi with ACI/Head smart tennis racket.



Fig. 5. ACI/Head smart ski.



Nadajnik kodu zasilany naciśnięciem palca

szyby okienne
podłogi
amortyzatory samochodowe
aktywne amortyzatory
inteligentne opony
meble (łóżka, fotele itp.)
zabawki



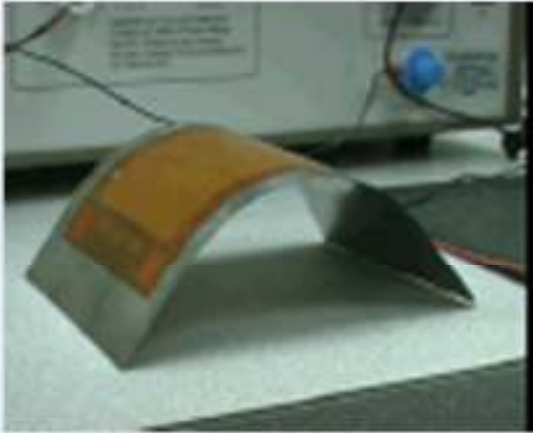
ręczna ładowarka



Elektryczne buty



diagnostyka medyczna



materiały inteligentne



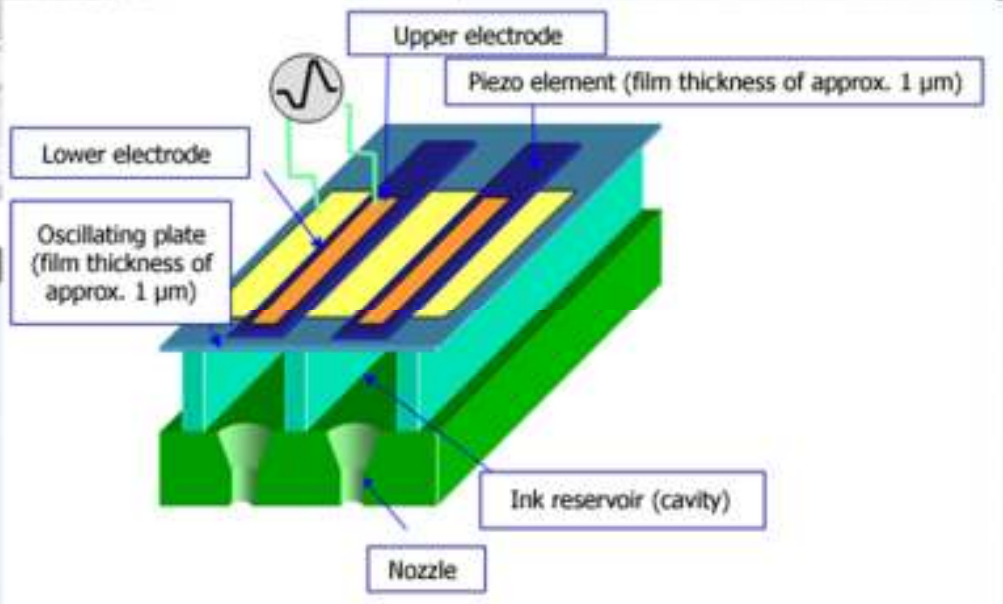
aktywatory



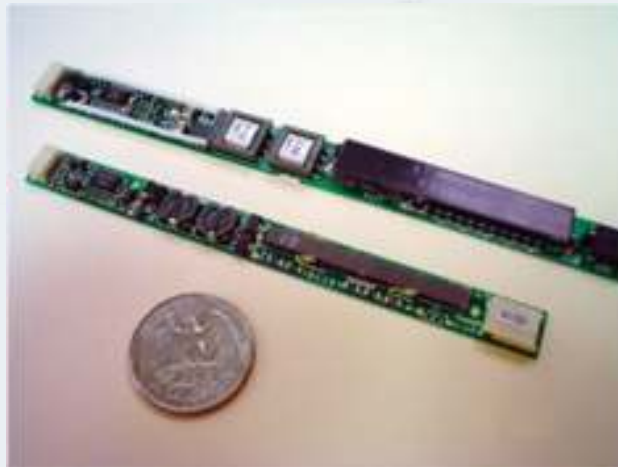
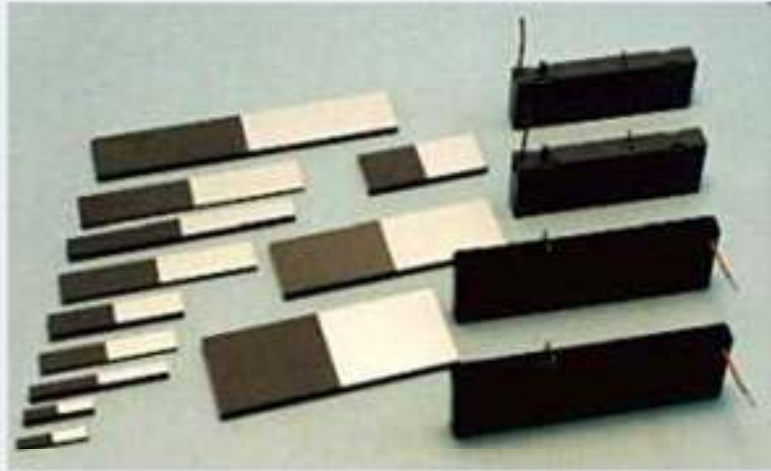


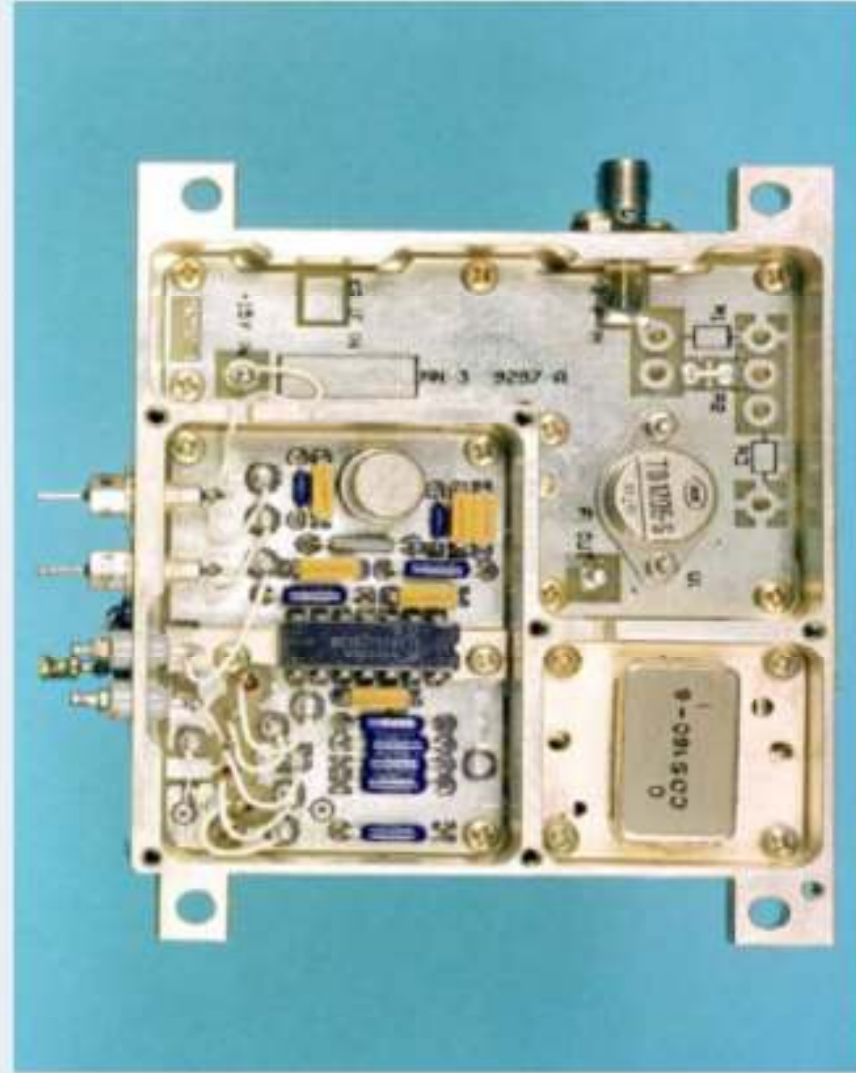
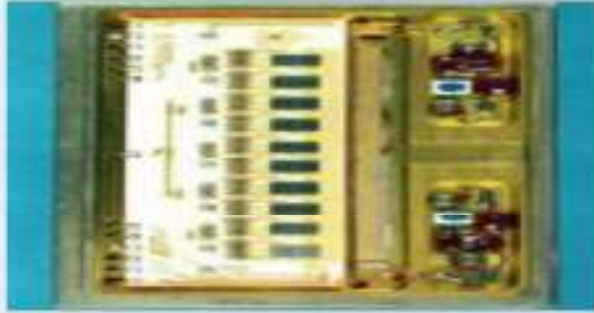
dysze

The new Audi ABL 4 2 TDI quattro



piezo-transformatory



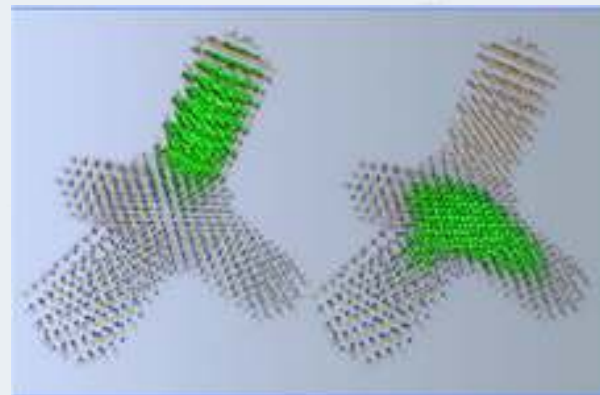
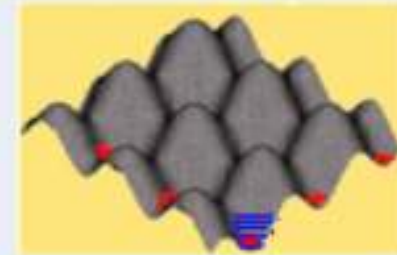
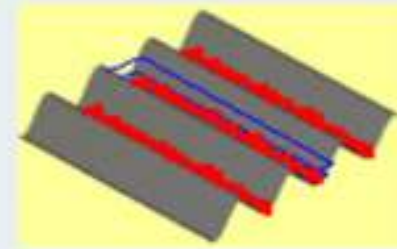
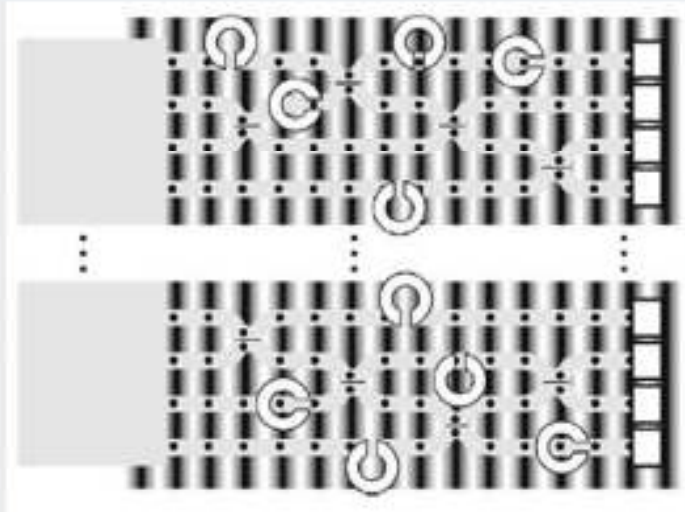


zaawansowane przetwarzanie sygnałów

elektroniczne nosy

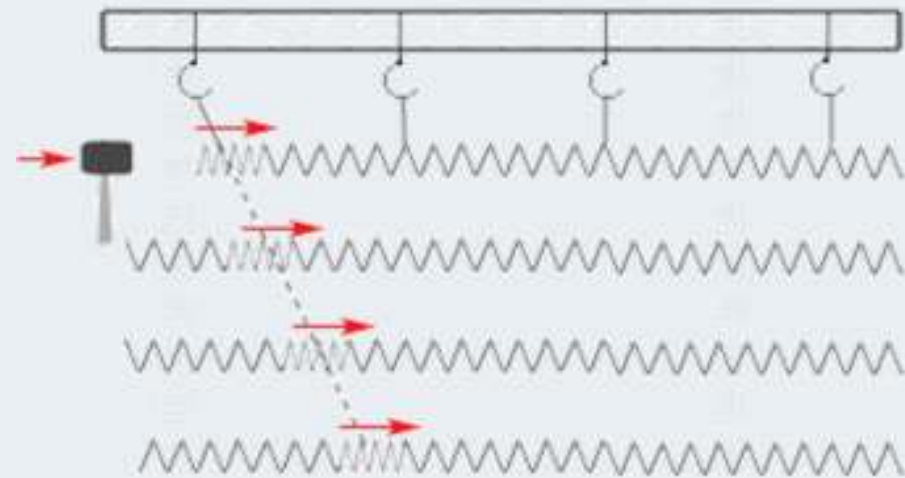
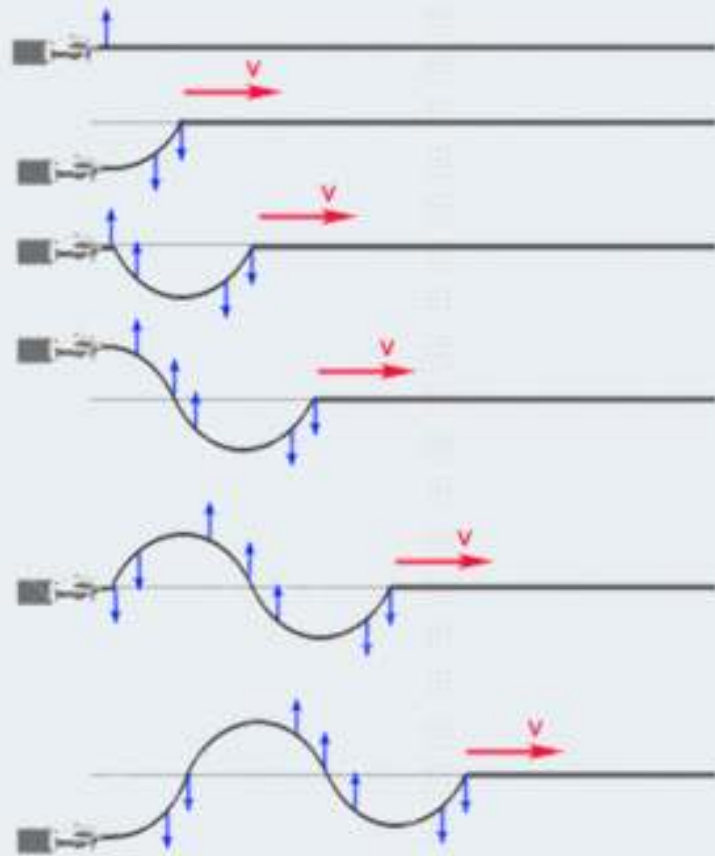


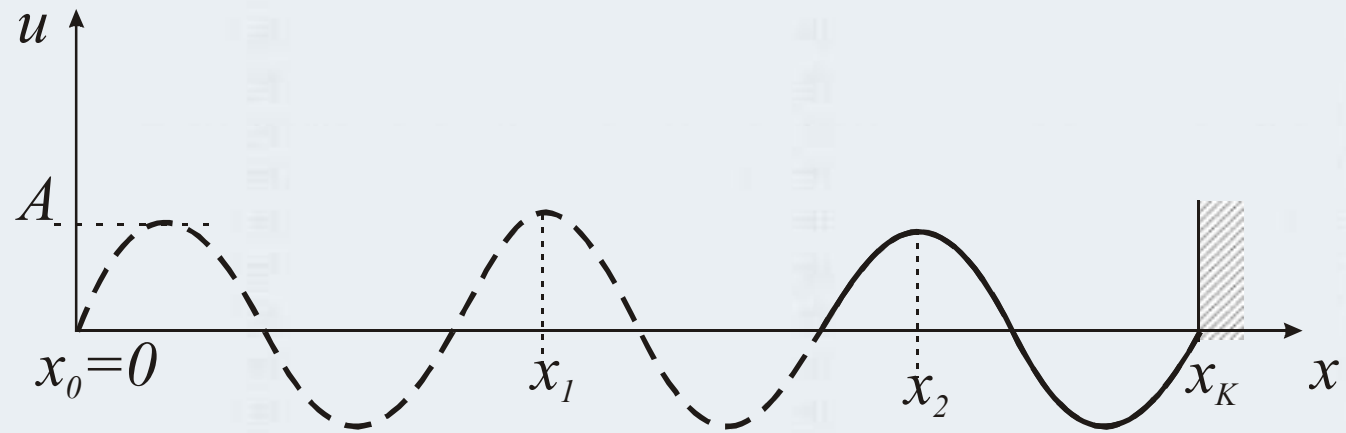
akustyka kwantowa



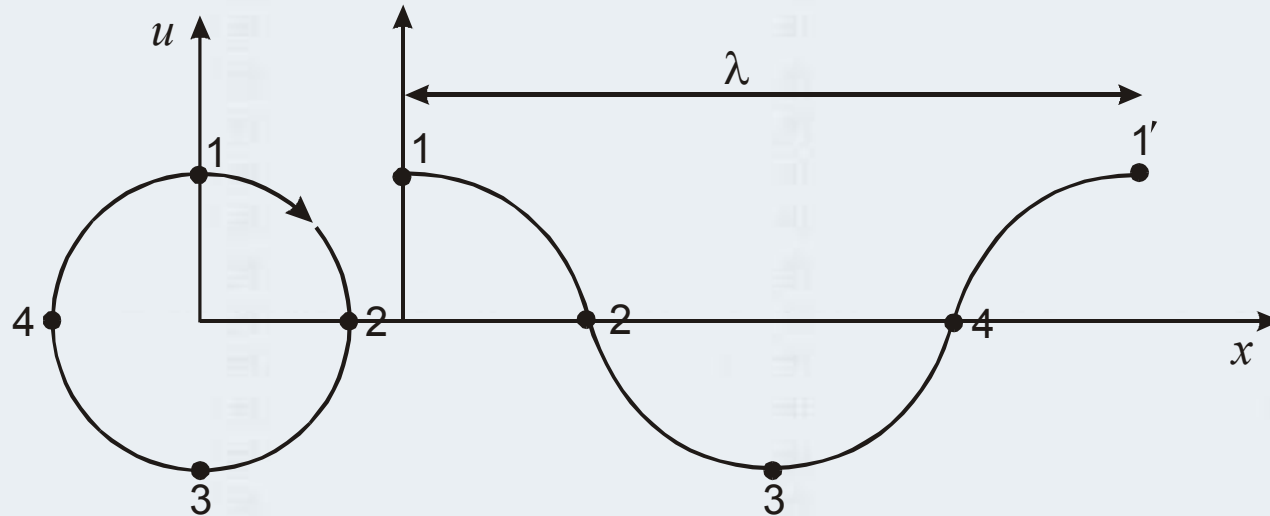
PODSTAWY FIZYCZNE

Fala = ruch zaburzenia w ośrodku ciągłym





$$u = A \cos \omega t$$



czas potrzebny na zmianę fazy fali do położenia 1 do (analogicznie do jednego pełnego obrotu koła) nazywa się **okresem T** ,

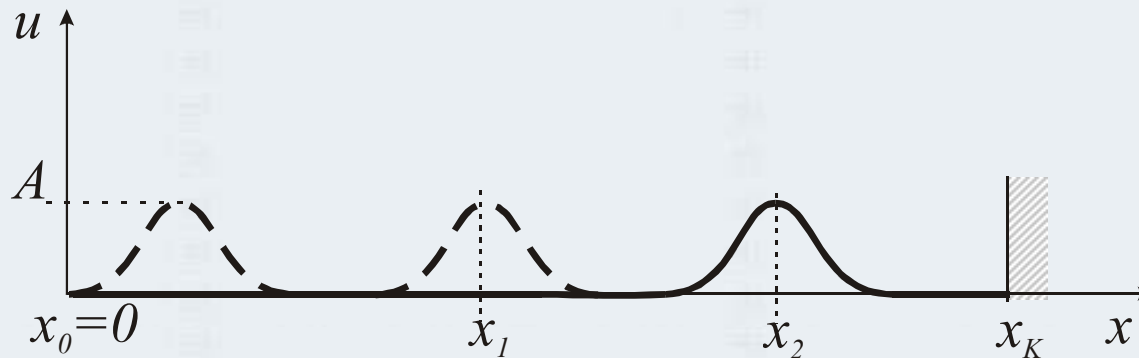
liczba cykli fali (w analogii do liczby obrotów koła) w jednostce czasu to **częstotliwość f** ,

wyrażona w radianach zmiana fazy fali w jednostce czasu (kąt obrotu koła w jednostce czasu) to **pulsacja ω**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

dystans jaki pokonuje fala w czasie trwania jednego okresu nazywam się **długością fali λ**

maksymalna wartość u (równa promieniowi koła) jest nazywana **amplitudą fali A**



Dla dowolnego punktu x **opóźnienie fazowe** względem początku liny proporcjonalne będzie do przebytej przez falę drogi.

Jeśli współczynnik proporcjonalności oznaczmy przez k to wychylenie liny w dowolnym punkcie wyniesie:

$$u = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\lambda = |x_1 - x_2| \quad (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, zaś $u = A \cos(\omega t - kx)$

$$u = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

**Jest to równanie monochromatycznej fali biegnącej
(tzn. fali sinusoidalnej o stałej amplitudzie i częstotliwości)**

Jeśli w czasie jednego okresu T fala pokonuje dystans λ to musi się ona poruszać (propagować) z prędkością

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

stąd $k = \frac{\omega}{v}$

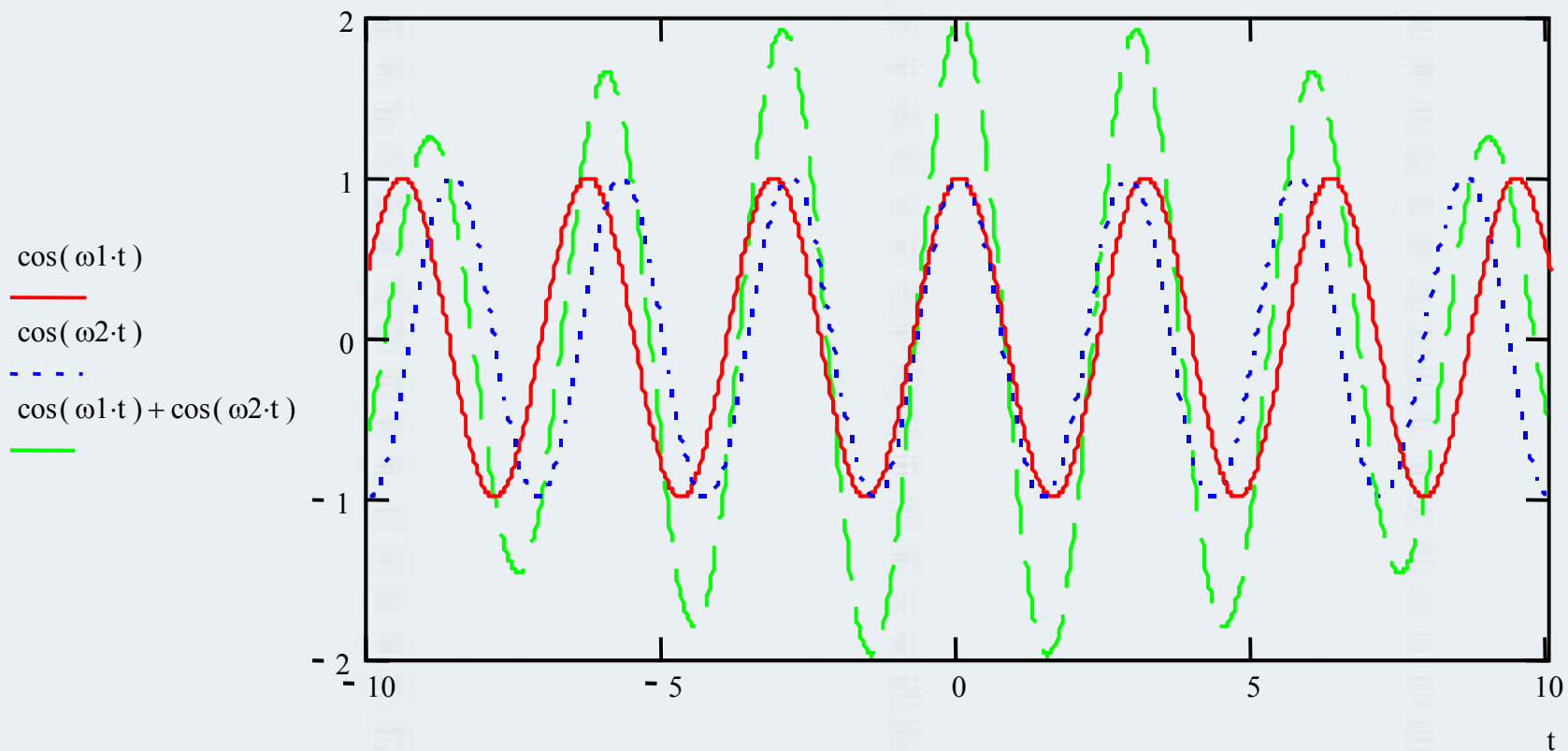
$$u = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$u = A \cos(\omega t - kr)$$

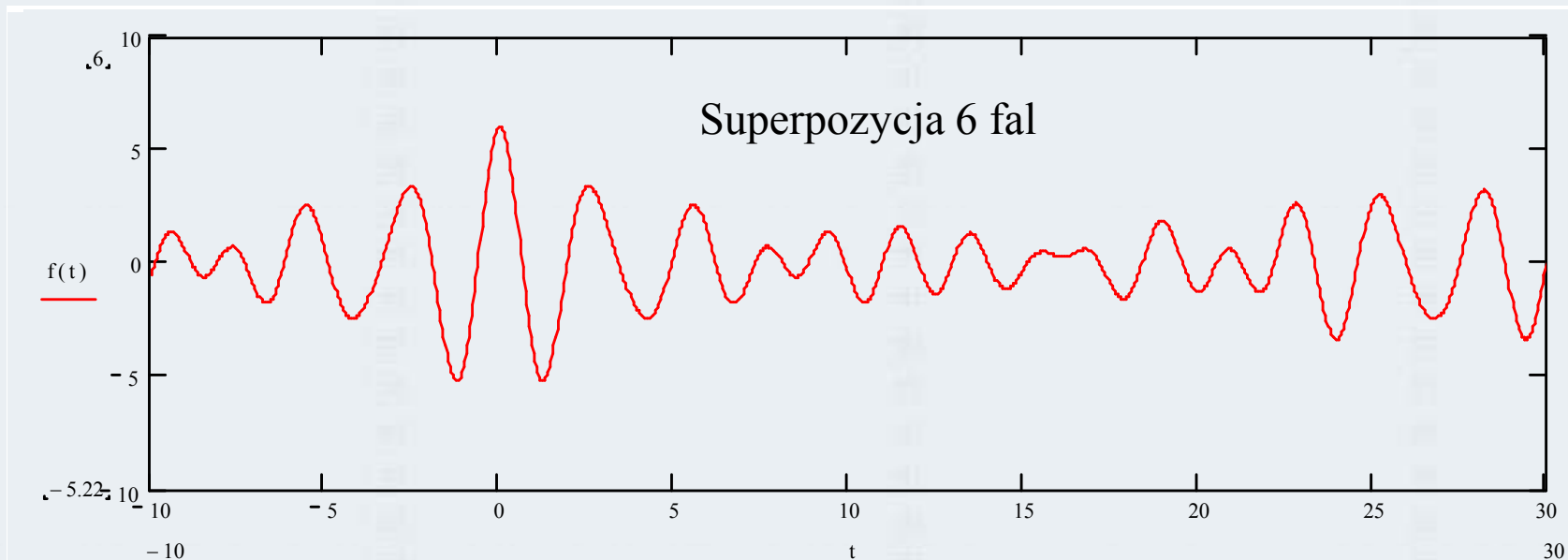
Prędkości dźwięku w wybranych ośrodkach

Materiał	Gęstość [kg/m ³]	Prędkość [m/s]
Powietrze suche -20 ⁰ C	1,396	319
Powietrze suche 0 ⁰ C	1,293	331
Powietrze suche 20 ⁰ C	1,21	344
Powietrze suche 100 ⁰ C	0,947	387
Wodór 0 ⁰ C	0,090	1260
Para wod. 130 ⁰ C	0,54	450
Woda 20 ⁰ C	998	1480
Lód	920	3200
Drzewo	600	4500
Szkło	2500	5300
Beton	2100	4000
Stal	7700	5050

Fale występujące w przyrodzie lub też generowane sztucznie są niemal zawsze **superpozycjami** (sumami czy też złożeniami) wielu fal monochromatycznych

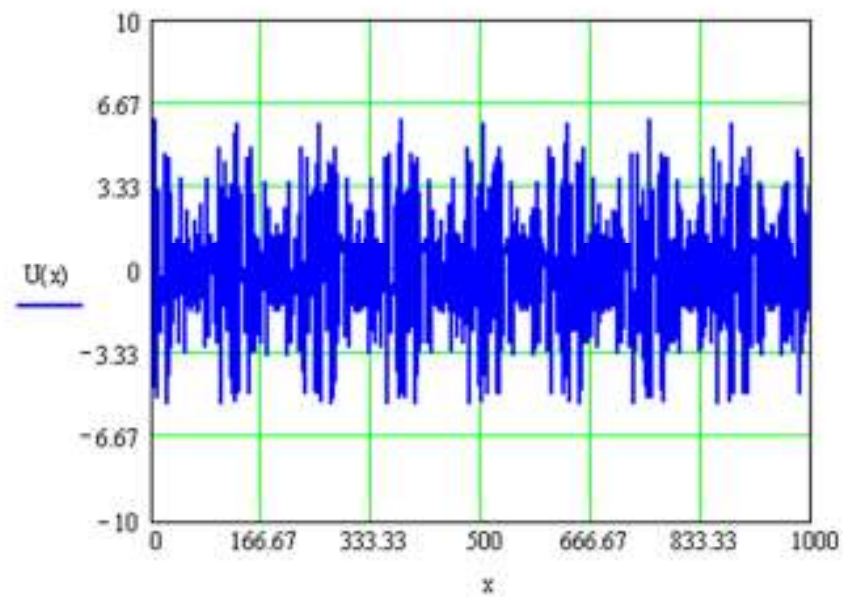
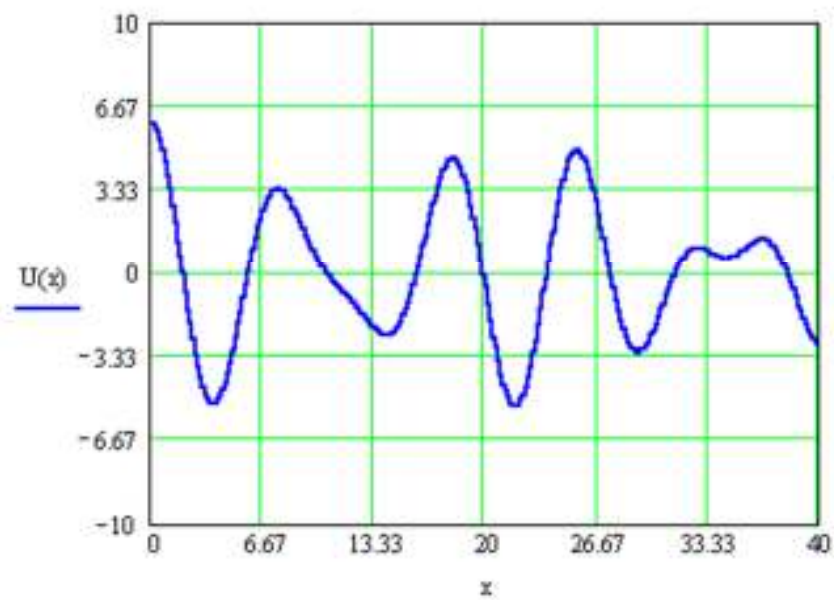


dwie fale o 10 % różnicy częstotliwości i ich superpozycja (zielona)

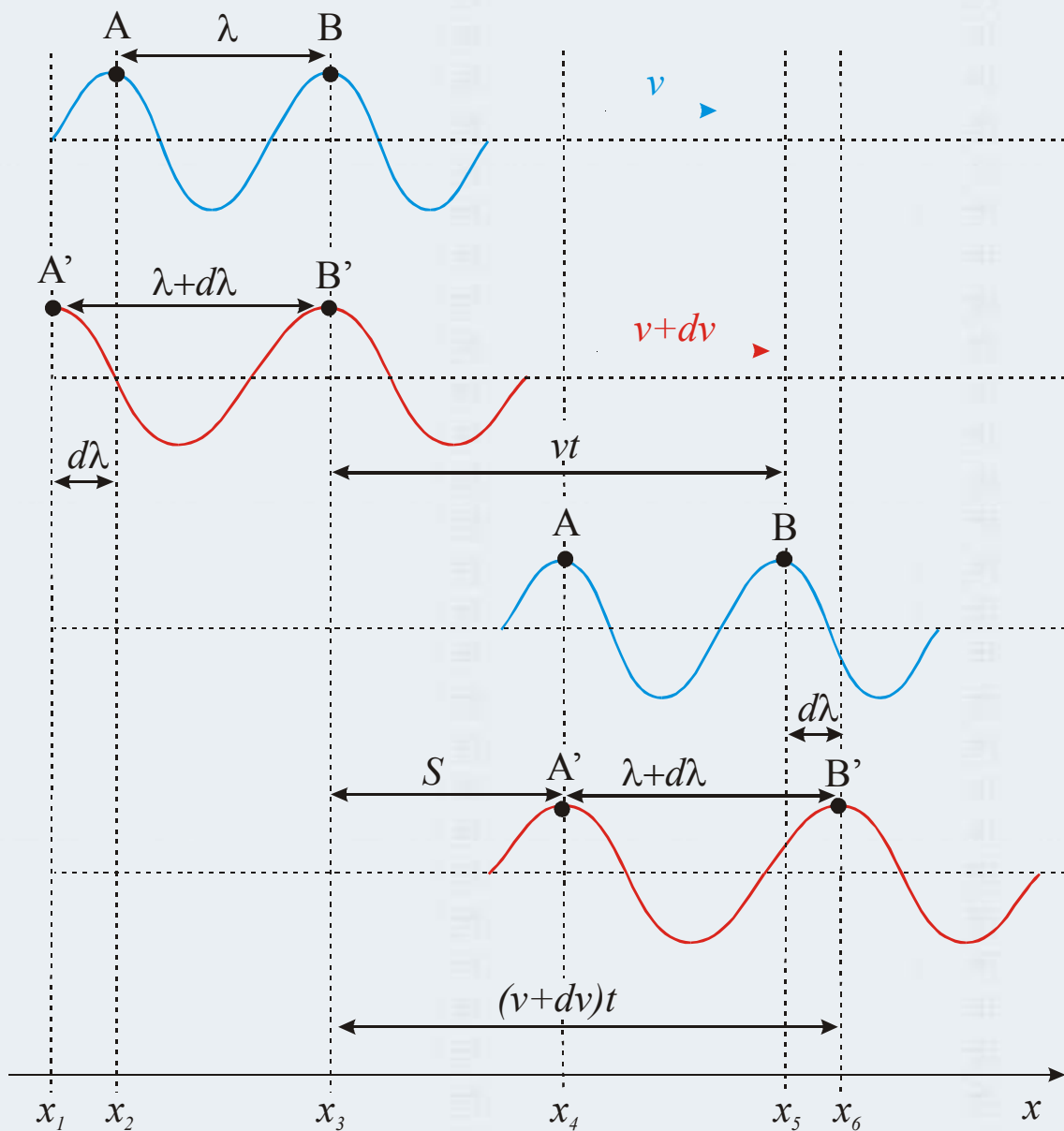


Jeśli każda z fal składowych porusza się z inną prędkością to prędkość fazowa superpozycji jest niezdefiniowana

Dyspersja jest to zależność parametrów ośrodka od częstotliwości, w szczególności mianem tym określa się zależność prędkości fali od częstotliwości w danym ośrodku.



Prędkość grupowa jest prędkością przemieszczania się maksimum paczki falowej



$$v_g = \frac{S}{t}$$

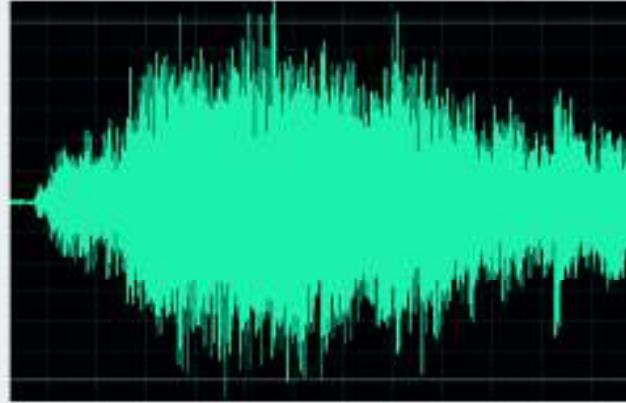
$$S = vt - \lambda$$

$$v_g = v - \frac{\lambda}{t}$$

$$d\lambda = (v + dv)t - vt = dv \cdot t$$

$$t = \frac{d\lambda}{dv}$$

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$



Gdy sygnał złożony składa się z bardzo dużej liczby fal monochromatycznych to można go opisać przyjmując w charakterze zmiennej liczbę falową

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$$

Wielkość $A(k)$ nazywana jest **spektralną gęstością amplitudy pakietu falowego**

wykorzystując wzór Eulera dla liczb zespolonych

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

można zapisać drgania harmoniczne w postaci wykładniczej, szczególnie dogodnej przy różniczkowaniu

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_1) = A e^{i(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A} e^{i\omega t}$$

gdzie: $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ Wielkość $\tilde{A} = A e^{i\varphi_1}$ nazywana jest amplitudą zespoloną

z tego względu wyrażenie
$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$$

może mieć też postać
$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos(\omega t - kx) dk$$

Energia fal

Punkty materialne ośrodka uczestniczące w ruchu falowym wykonują jedynie drgania wokół ustalonego położenia równowagi. W każdej jednostce objętości ośrodka przenoszącego fale mechaniczne (sprężyste) zawarta jest energia

$$E = \frac{\rho v_{\max}^2}{2}$$

ρ gęstość czyli masa jednostki objętości

v_{\max} amplituda prędkości

$$v_{\max} = \omega A$$

$$E = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2}$$

Energia ta rozchodzi się z prędkością fali (grupową w przypadku paczki fal)

Natężenie fali - energia przechodząca w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni

Strumień energii – energia przechodząca w jednostce czasu (moc) przez ustaloną powierzchnię o polu S .

W jednostce czasu fala przebywa drogę

$$s = vt = v$$

wnosząc swoją energię do obszaru o objętości

$$V = Ss = Sv$$

Ponieważ na jednostkę objętości przypada energia E , na całą objętość przypadnie

$$\Phi = ESv$$

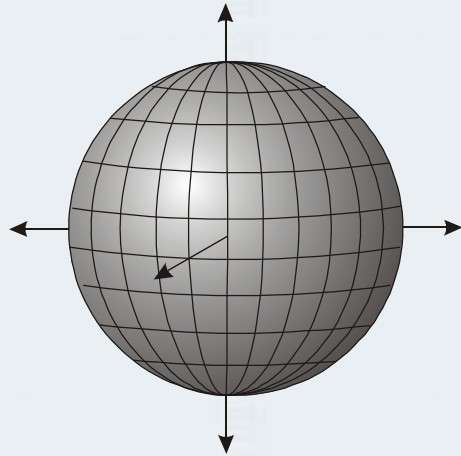
Jest to strumień energii przez powierzchnię S .

Natężenie definiuje się dla powierzchni jednostkowej, zatem

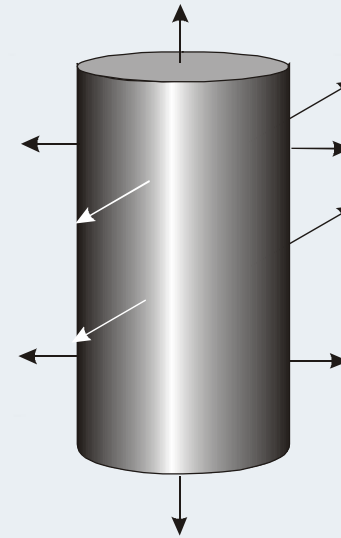
$$I = Ev$$

Opis fali w 3D wymaga wiedzy nt. poruszania się czoła fali – czyli zbiór punktów przestrzeni o jednakowej fazie drgań w określonej chwili.

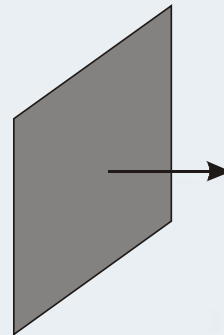
Czoło fali ma w ogólności kształt dowolny jednak w przybliżeniu izotropowym można czoło fali opisać za pomocą sfery, walca lub płaszczyzny.



dla źródeł punktowych



dla źródeł liniowych



fala płaska dla źródeł płaskich bądź w strefach odległych od innych źródeł

Jeśli w ośrodku nie ma strat (np. na ciepło) to energia przechodząca przez powierzchnie jednakowej fazy musi być stała.

Natężenie fali płaskiej podczas jej propagacji jest stałe.

Dla fal kulistych spada proporcjonalnie do kwadratu odległości (powierzchnie ekwifazowe rosną z kwadratem odległości), zaś dla fal cylindrycznych z pierwszą potęgą odległości

Amplituda fali kulistej spada więc proporcjonalnie do odległości

$$u = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \cos\left(t - \frac{\mathbf{r}}{v}\right)$$

dla fali cylindrycznej do pierwiastka kwadratowego z odległości

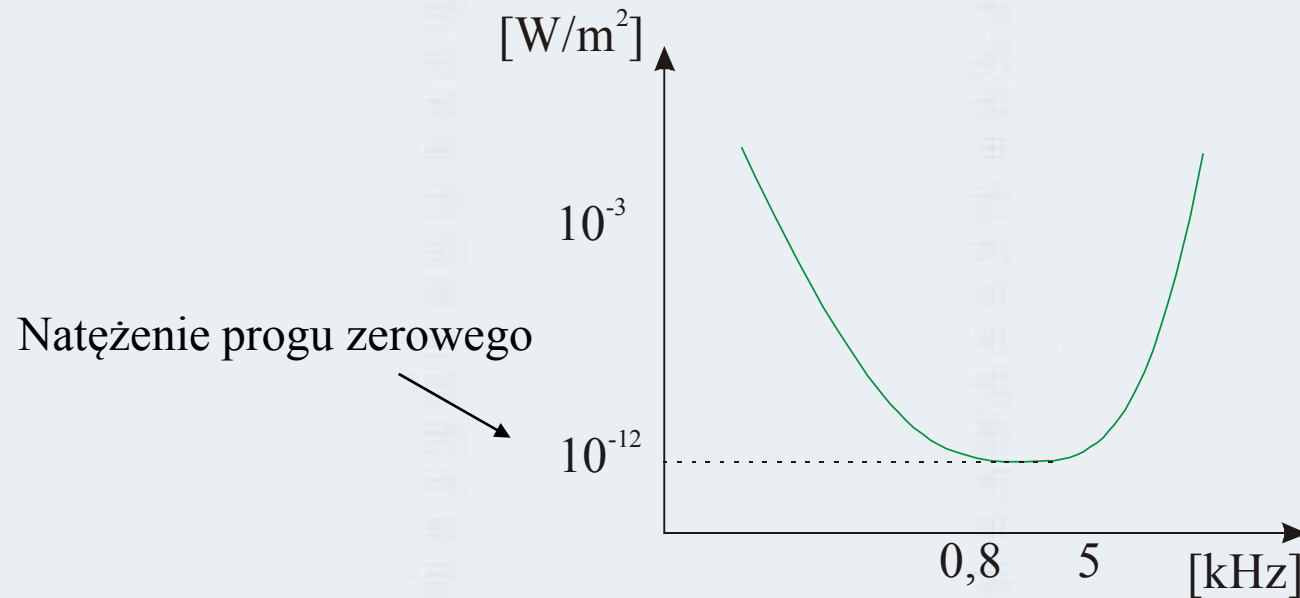
$$u = \frac{A}{\sqrt{|\mathbf{r}|}} \cos\left(t - \frac{\mathbf{r}}{v}\right)$$

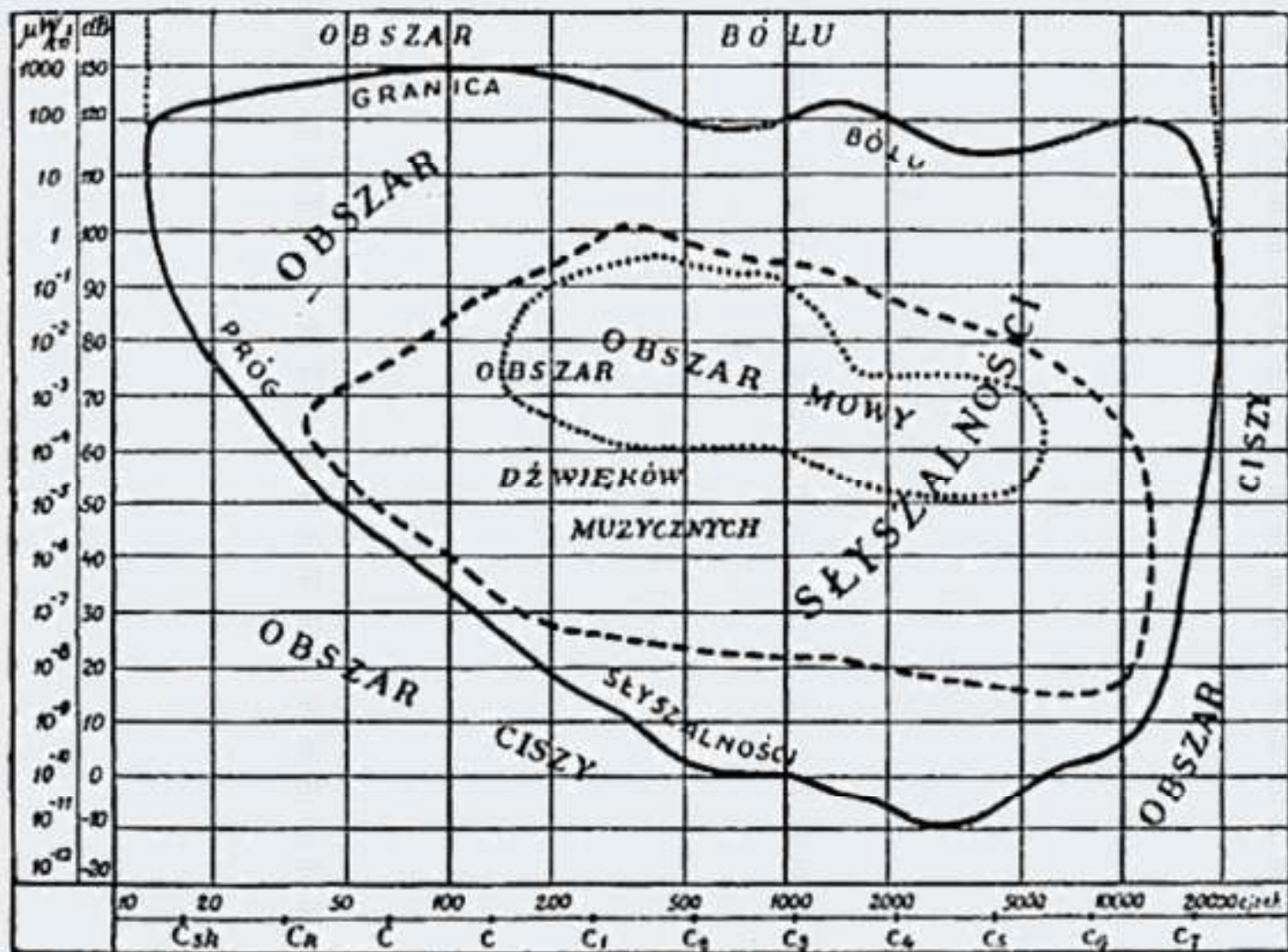
Natężenie dźwięku – moc przenoszona przez dźwięk przez jednostkę powierzchni

$$I_D = \frac{P}{S} \text{ [W/m}^2\text{]}$$

Natężenie dźwięku dla fal kulistych $S(r) = 4\pi r^2$

$$I_D = \frac{P}{4\pi r^2}$$





W ośrodku stratnym natężenie fali maleje znacznie szybciej niż rosną powierzchnie ekwipotencjalne – energia konwertowana jest na inne jej postacie.

Jeśli fala pokonała warstwę dx , to spadek natężenia musi być proporcjonalny do natężenia fali padającej i grubości tej warstwy

$$dI = -\alpha I dx$$

w.b. $I|_{x=0} = I_0 \quad I|_x = I$

dla skończonych odległości:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^x dx$$

stąd

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

spadek natężenia fali jest wykładniczy

Amplituda będzie spadała wg tej samej zależności ale współczynnik pochłaniania będzie dwukrotnie mniejszy.

$$A = A_0 e^{\frac{-\alpha x}{2}}$$

Odwrotność współczynnika tłumienia (pochłaniania) wyr. w [m] to grubość warstwy, po przejściu której natężenie fali maleje e razy

Odwrotność współczynnika tłumienia (pochłaniania) wyr. w [m] to grubość warstwy, po przejściu której natężenie fali maleje e razy

Podwojona odwrotność współczynnika tłumienia (pochłaniania) wyr. w [m] to grubość warstwy, po przejściu której amplituda fali maleje e razy

Tłumienie **na ogół** rośnie wraz z częstotliwością

$$\alpha = a\omega^2$$

a jest współczynnikiem wyznaczanym empirycznie, dla powietrza

$$a \approx 4 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right]$$

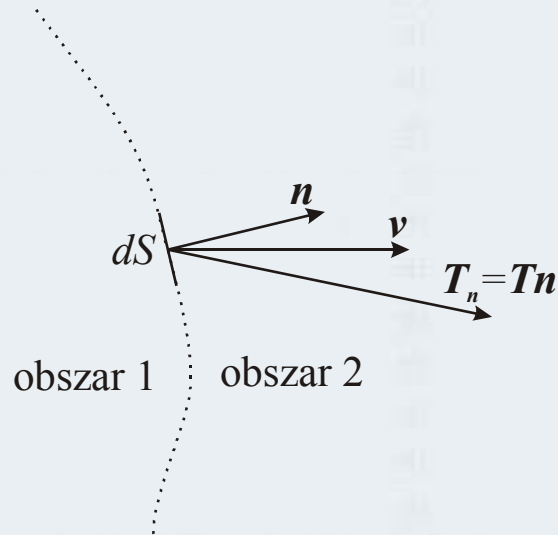
Na drodze 1 km fala 100 Hz ulega tłumieniu $\sim 1,02$ razy zaś fal ultradźwiękowa o częstotliwości 20 kHz – 10^{274} razy!

Dla fal podłużnych w cieczech współczynnik α jest odwrotnie proporcjonalny do sześcianu prędkości fali i wprost proporcjonalny do lepkości ośrodka.

Tak silna zależność od prędkości oraz stosunkowo duża lepkość powietrza powodują, że pochłanianie fal ultradźwiękowych w cieczech jest ok. 100-krotnie słabsze.

Fale ultradźwiękowe w wodzie rozchodzą się więc na odległość ~ 1000 krotnie większą niż w gazach

Przepływ mocy – akustyczny wektor Poyntinga



Przepływ mocy z obszaru 1 do obszaru 2 $-vTndS = PndS$

$$P = -vT$$

Gęstość przepływu mocy w kierunku n

Zasada Huygensa (wym. hojchensa)

Każdy punkt ośrodka, do którego dotarło czoło fali można uważać za źródło nowej fali kulistej.

Fale te zwane są falami cząstkowymi i interferują ze sobą.

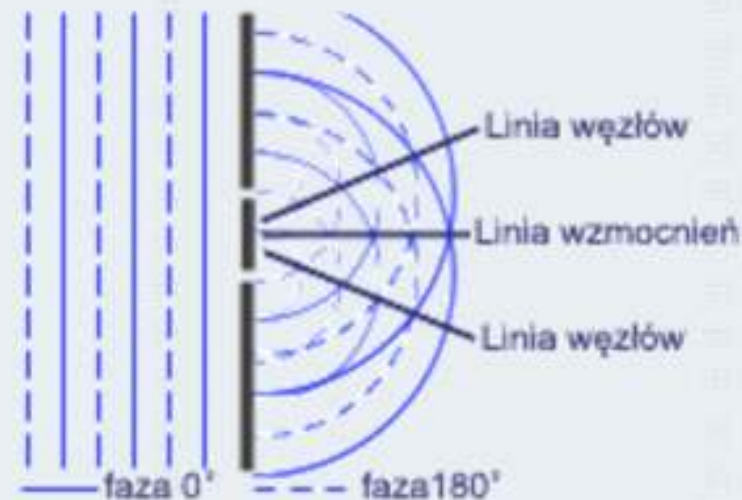
Wypadkową powierzchnię falową tworzy powierzchnia styczna do wszystkich powierzchni fal cząstkowych i to właśnie ją obserwuje się zwykle w ośrodku.

Z zasady Huygensa wynika, że fale rozchodzą się izotropowo (również wstecznie).

Nie zgadza się to całkiem z doświadczeniem.

Poprawkę zasady wprowadził Kirchhoff dodając współczynnik kierunkowy:

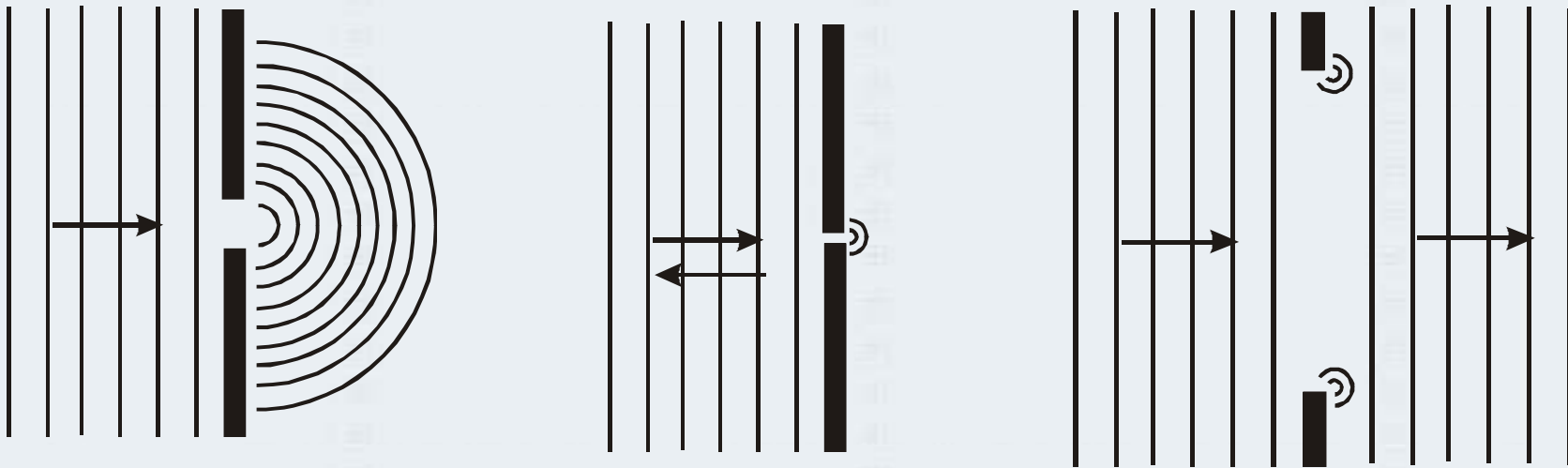
$$A(\theta) = \frac{1}{2} A_0 (1 + \cos \theta)$$



Dyfrakcja

Zjawisko zmiany kierunku rozchodzenia się fali na krawędziach przeszkód oraz w ich pobliżu. Zachodzi ono dla przeszkód o dowolnych rozmiarach ale wyraźnie jest obserwowane dla rozmiarów porównywalnych z długością fali.

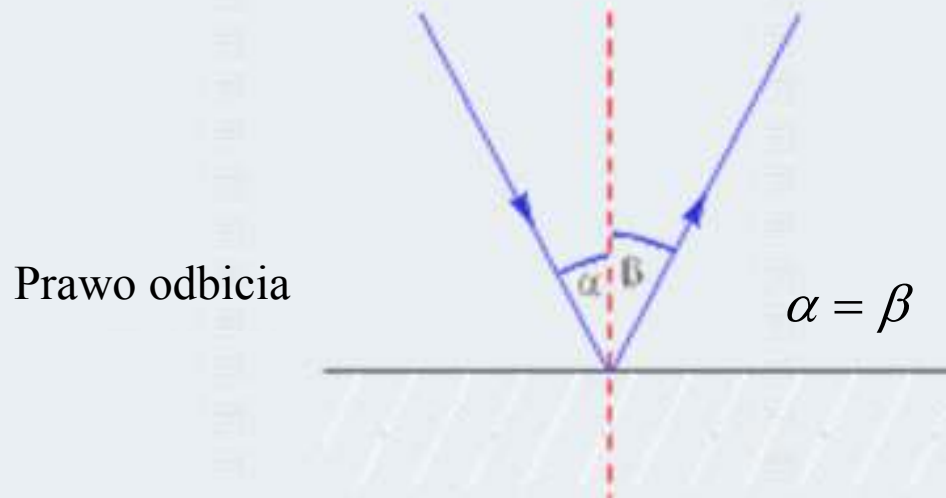
Jest to bezpośrednia konsekwencja zasady Huygensa



Zasada Fermata

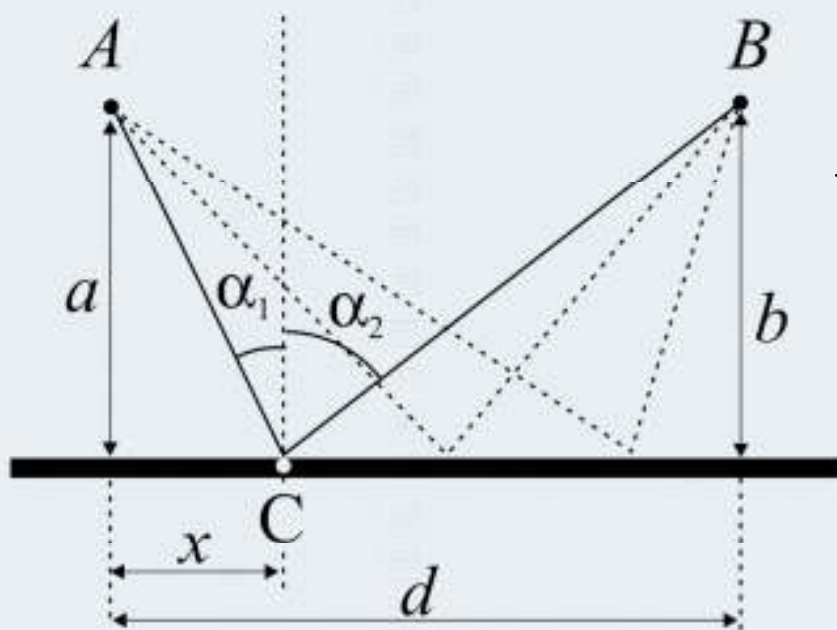
Fala biegnąca z jednego punktu do drugiego przebywa drogę, na której przebycie trzeba w porównaniu z innymi sąsiednimi drogami minimum lub maksimum czasu. Zasada ta prowadzi do wniosku, że fala w ośrodkach jednorodnych rozchodzi się po liniach prostych, a także podlega odbiciom i załamaniom.

$$\frac{ds}{dx} = 0$$



Przy odbiciu fali od ośrodka o wyższej sztywności następuje zmiana fazy na przeciwną

tor propagacji każdej fali spełnia zasadę Fermata



$$\overline{ACB} = s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \rightarrow \frac{ds}{dx} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

**Fale rozchodzą się po liniach prostych
ale tylko w ośrodku jednorodnym**

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$$

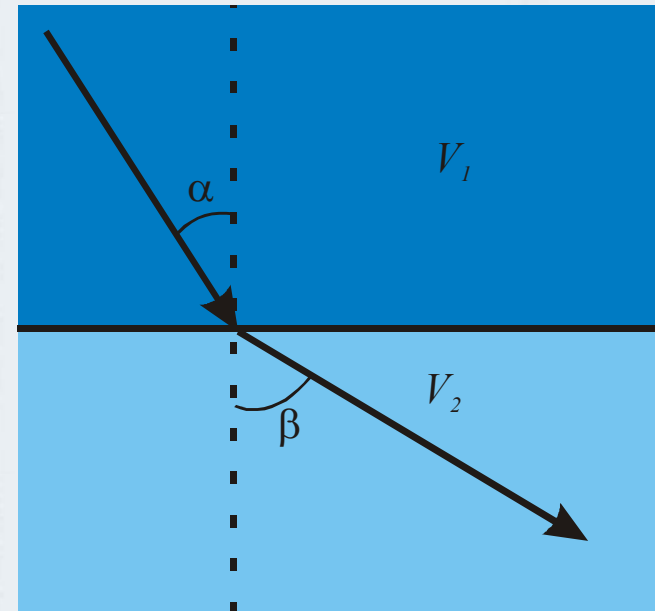
Prawo załamania (Snelliusa)

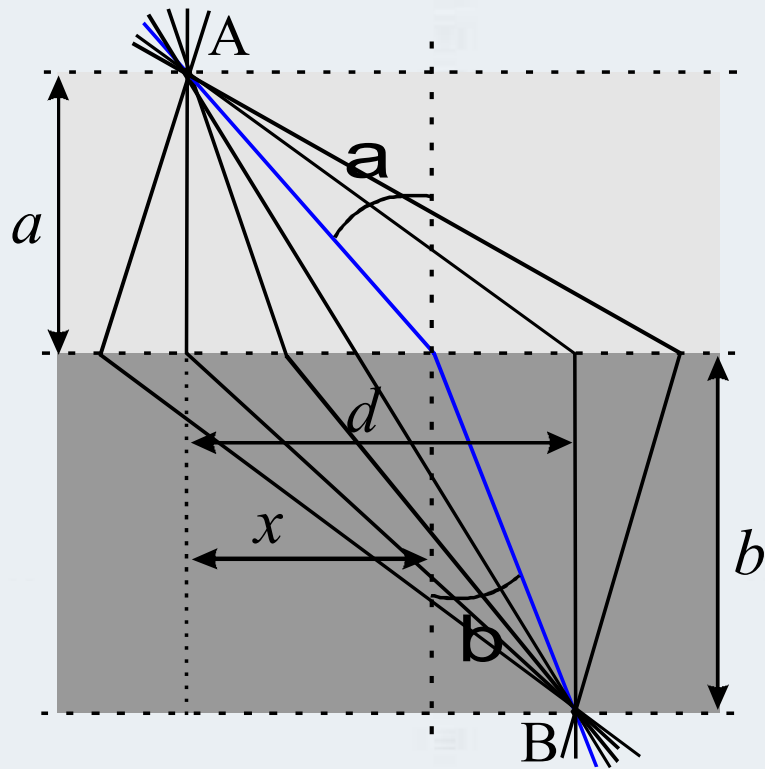
Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania, zwany współczynnikiem załamania n ośrodka drugiego względem pierwszego, jest równy stosunkowi prędkości rozchodzenia się fali w ośrodku pierwszym do prędkości rozchodzenia się fali w ośrodku drugim. Promień fali padającej, promień fali załamanej i prosta prostopadła (normalna) do granicy ośrodków leżą w jednej płaszczyźnie.

Zmiana kierunku rozchodzenia się fali nosi nazwę **refrakcji**.

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Związek ten wynika z zasady Fermata





$$\overline{AB} = s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

z zasady Fermata

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}}$$

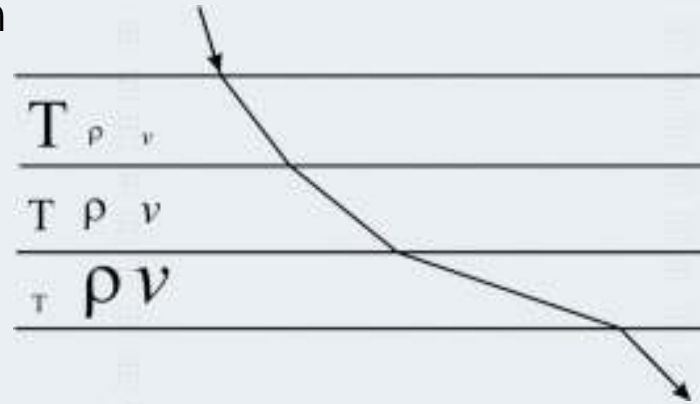
$$\frac{c}{v} \stackrel{\text{def}}{=} n$$

wsp. załamania

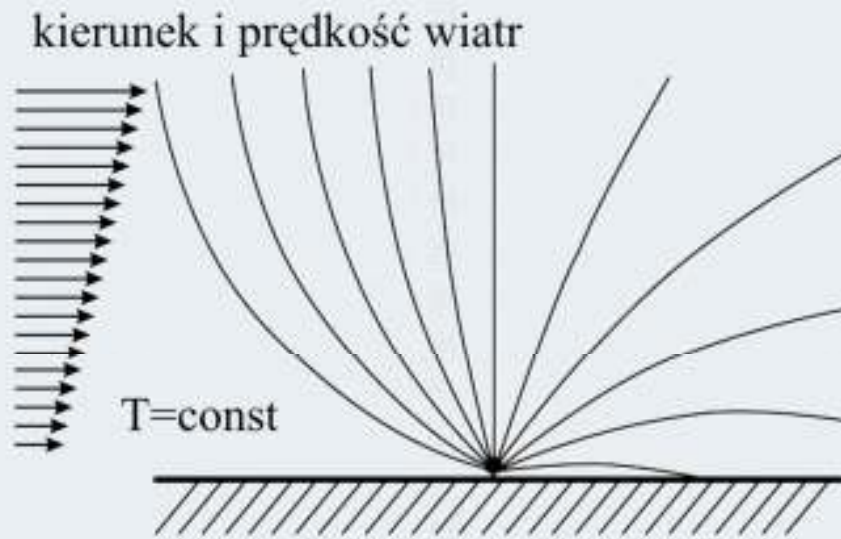
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Powstawanie stref głośnych i cichych

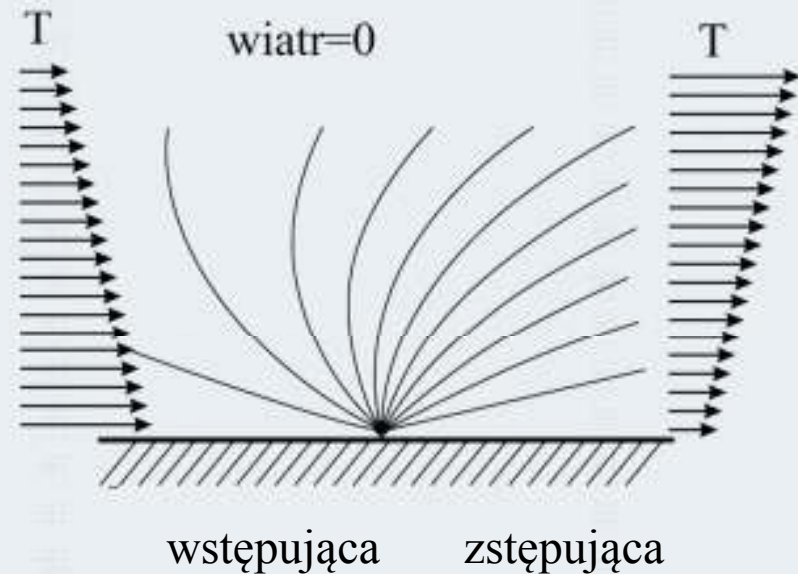
czasu propagacji = ekstremum



refrakcja wiatrowa

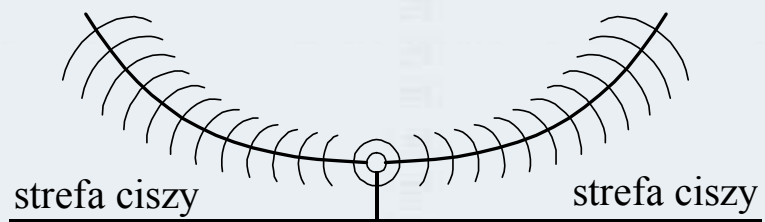


refrakcja temperaturowa

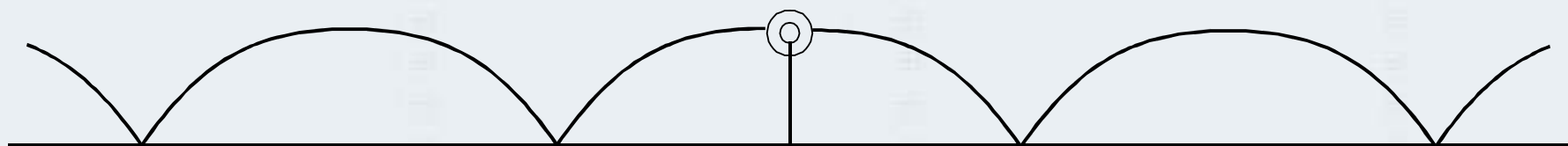
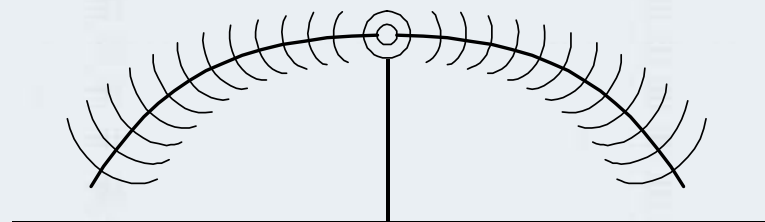


Temperaturowe anomalie refrakcyjne

dzień



noc



powstawanie echa na wodzie w nocy

Rezonans akustyczny (mechaniczny)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = Fe^{j\omega t}$$

szukane rozw. w postaci $x = Ae^{j\omega t}$

r-nie charakt. $A(-m\omega_0^2 + j\alpha\omega_0 + k) = F$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$$

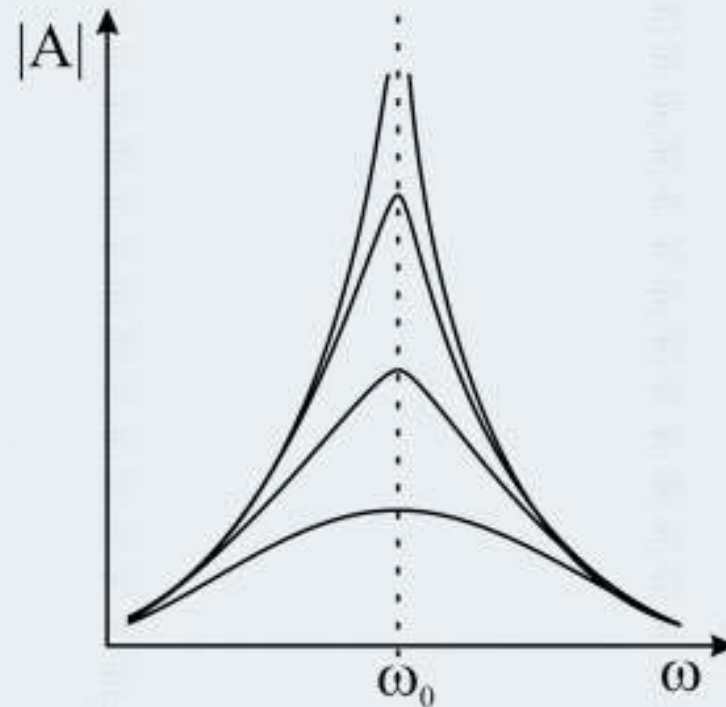
$$A = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}}$$

$$|A| = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

arg A – przesunięcie fazowe między
oscylacją własną a oscylacją siły
wymuszającej

dla dużych wartości τ

$$|A| \rightarrow \delta(\omega_0)$$

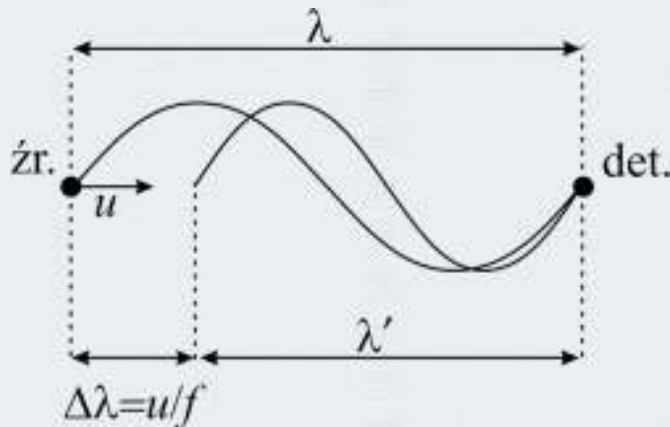


Efekt Dopplera-Ficeau

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f' = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{c+v}{c} f = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f$$

detektor nieruchomy – źródło porusza się z prędkością u



$$f' = \frac{c+v}{c-u} f$$

źródło i detektor są w ruchu

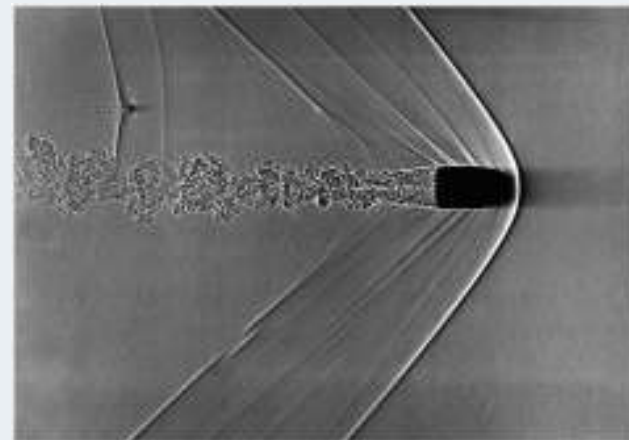
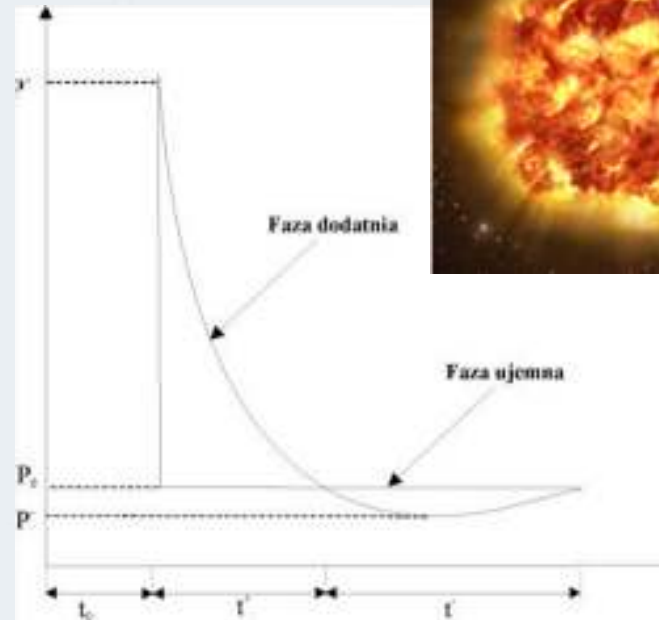
$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda - \frac{u}{f}} = \frac{c}{c - u} f = \left(\frac{1}{1 - \frac{u}{c}}\right) f$$

Fala uderzeniowa

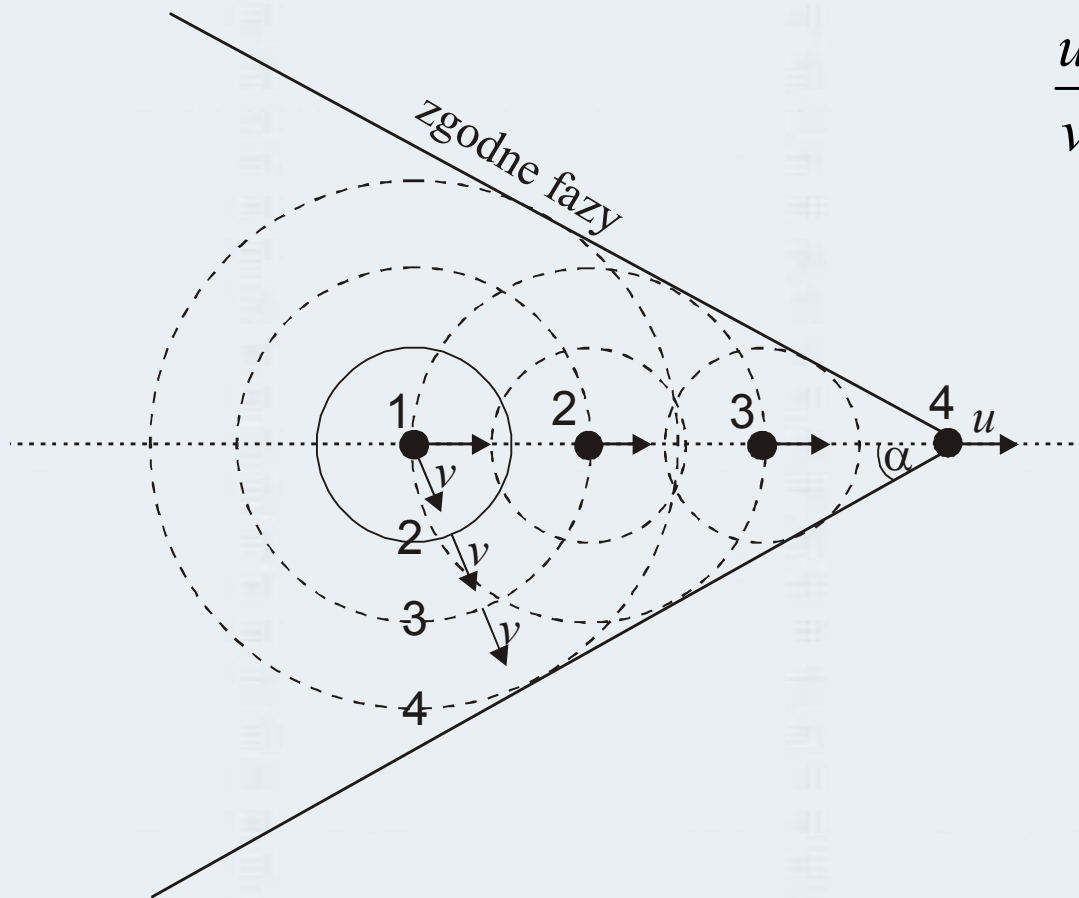
źródło szybsze od fali



bat i broń sejsmiczna



powstawanie fali uderzeniowej



$$\frac{u}{v} = \sin \alpha$$

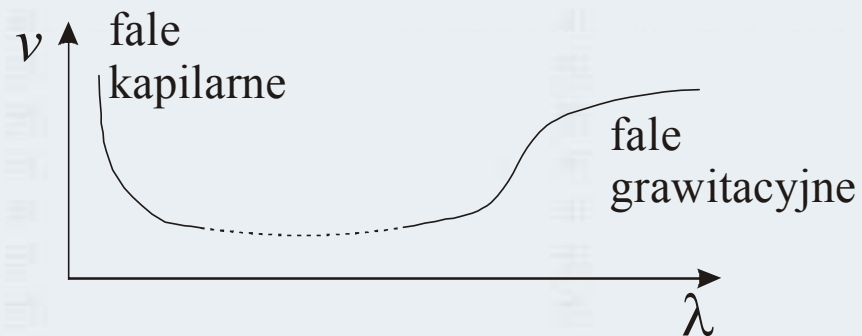
Fale na wodzie

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot th(kh)}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} th \frac{2\pi h}{\lambda}}$$

na wodzie głębokiej $\lambda \ll h$ $th \alpha \approx 1$ $v = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

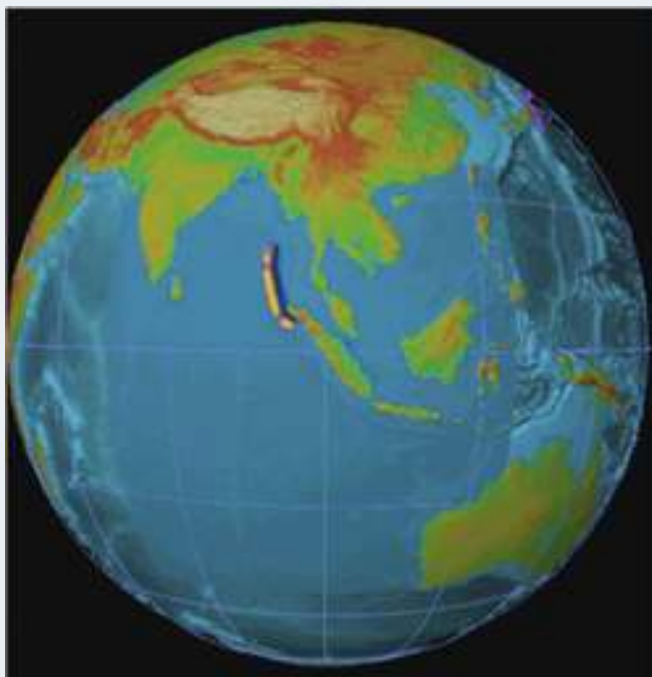
na wodzie płytkiej $\lambda \gg h$ $th \alpha \approx \alpha$ $v = \sqrt{gh}$

zmarszczki na wodzie $\lambda < 10 \text{ cm}$ $v = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$
(fale kapilarne)



Zjawisko TSUNAMI

fale w wodzie płytkiej (sic!) $v = \sqrt{gh}$



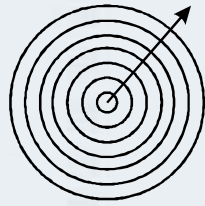
10^{15} [J]



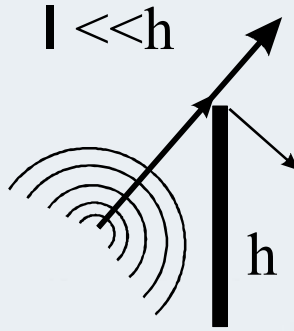
26. 12. 2004 – Ocean Indyjski

h [m]	v [km/h]	λ [km]
5000	800	160
10	36	7

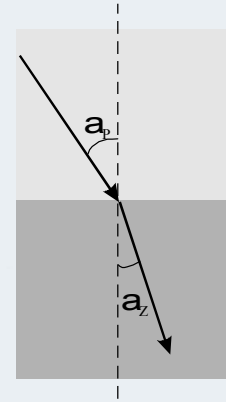
26. 12. 2004 – Ocean Indyjski



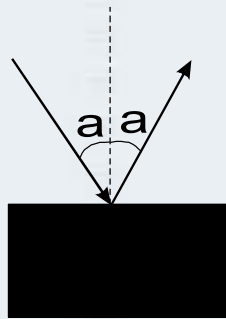
propagacja
swobodna



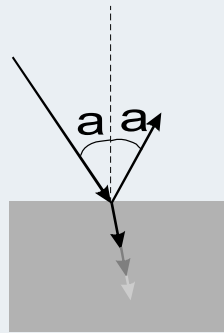
dyfrakcja
(ugięcie)



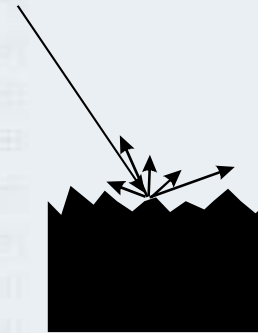
refrakcja
(załamanie)



całkowite
odbicie



częściowe
odbicie
pochłanianie



rozpraszanie

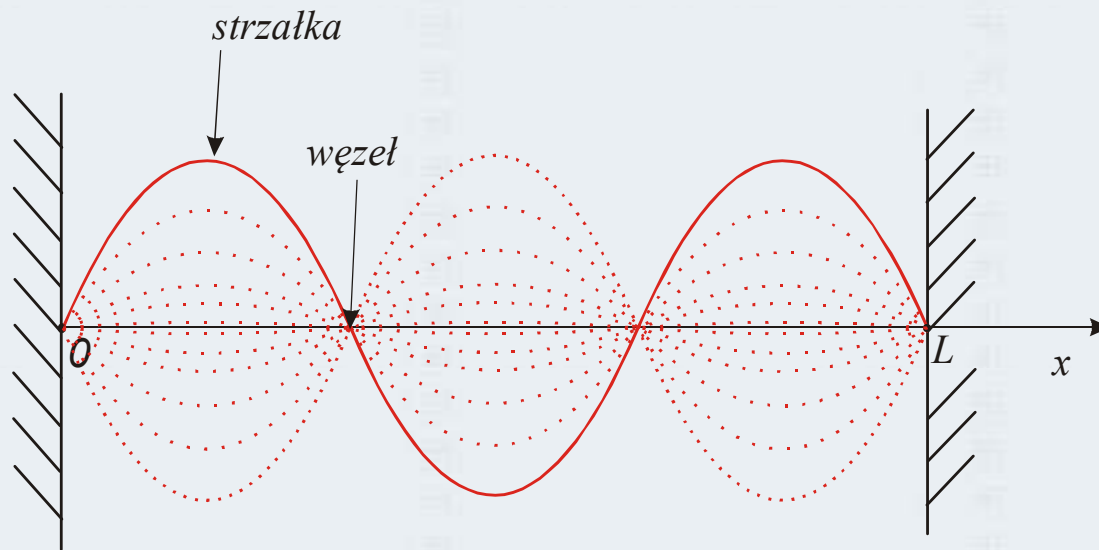
Fale w ośrodkach geometrycznie ograniczonych

Interesujący rezultat otrzymuje się przy nałożeniu (zsumowaniu) dwóch fal o jednakowych amplitudach i częstotliwościach propagujących się w przeciwnych kierunkach.

$$u = A \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$u = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t$$



$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{strzałki} \quad x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{węzły} \quad x = \frac{n\lambda}{2}$$

Formalnie twór taki nie jest falą ponieważ zaburzenie nie rozchodzi się!

Zupełna fala stojąca



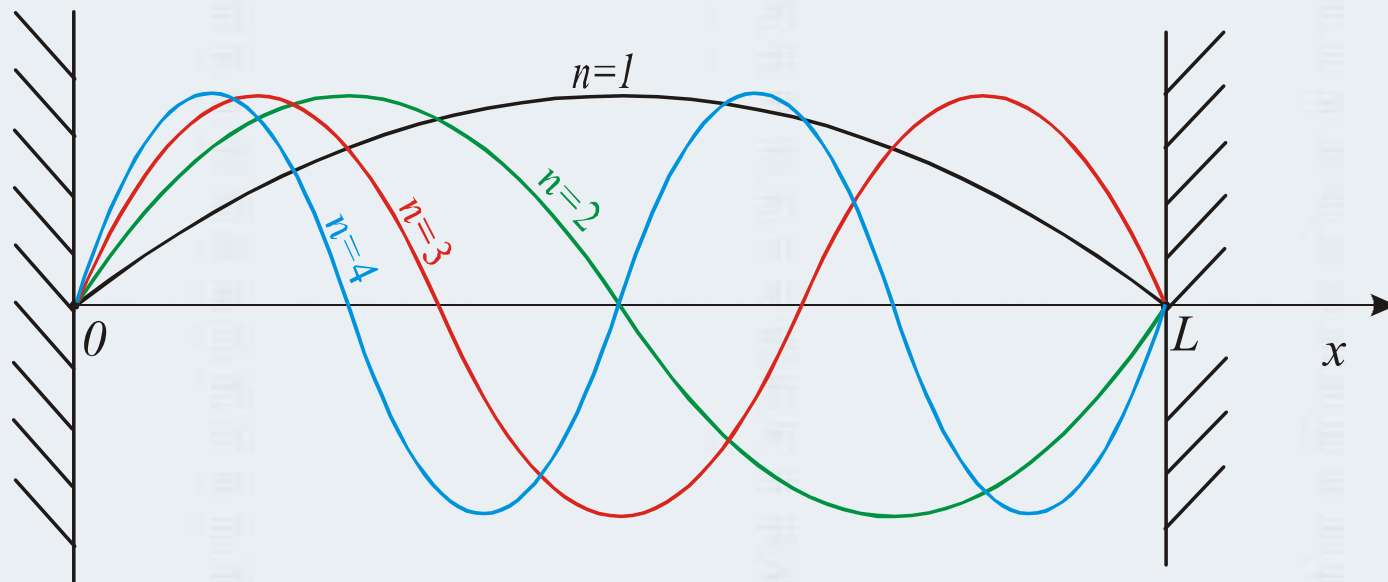
Niech fala odbija się całkowicie (zupełnie) pomiędzy dwoma równoległymi płaszczyznami znajdującymi się w punktach $x=0$ oraz $x=L$. W punktach tych muszą znaleźć się węzły fali, co oznacza spełnienie warunku:

$$2A \sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0$$

i prowadzi do zależności

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{lub} \quad f = n \frac{v}{2L}$$

Między dwoma płaszczyznami odległymi o L mogą więc powstawać tylko fale stojące o długościach będących podwielokrotnością $2L$ czyli o częstotliwościach będących wielokrotnością $v/2L$



Zupełne odbicie fali od przeszkody jest sytuacją wyidealizowaną. Przypadkiem realistycznym jest odbicie częściowe (niezupełne). Załóżmy, że na przeszkodę pada fala o amplitudzie A_{PAD} , odbija się częściowo od tej przeszkody i propaguje w przeciwnym kierunku z amplitudą A_{ODB} . Po nałożeniu tych fal otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 u &= A_{PAD} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + A_{ODB} \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) = \\
 &= \underbrace{(A_{PAD} - A_{ODB}) \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)}_{\text{fala biegnąca}} + \underbrace{A_{ODB} \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]}_{\text{fala stojąca}}
 \end{aligned}$$

albo inaczej

$$u = (A_{PAD} - A_{ODB}) \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + 2 A_{ODB} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t$$

Miarą zupełności (czy też niezupełności) odbicia jest tzw. współczynnik fali stojącej określany z zależności:

$$WFS \stackrel{def}{=} \frac{A_{PAD} + A_{ODB}}{A_{PAD} - A_{ODB}}$$

$$\Gamma \stackrel{def}{=} \frac{A_{ODB}}{A_{PAD}}$$

$$WFS = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$$|\Gamma| = \frac{WFS - 1}{WFS + 1}$$

$$WFS \in \langle 1; \infty \rangle$$

brak odbicia

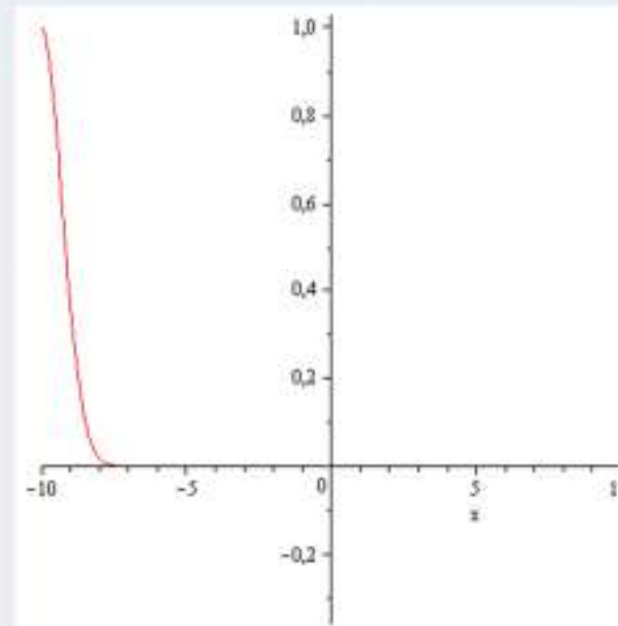
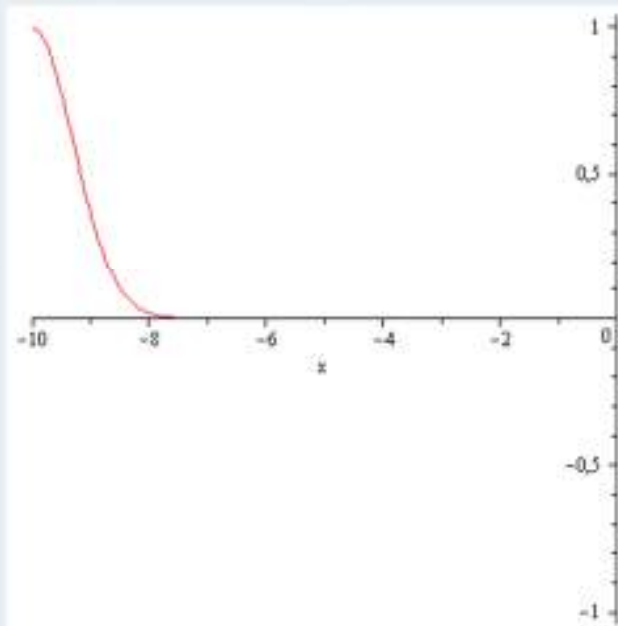
odbicie zupełne

$$|\Gamma| \in (0; 1)$$

brak odbicia

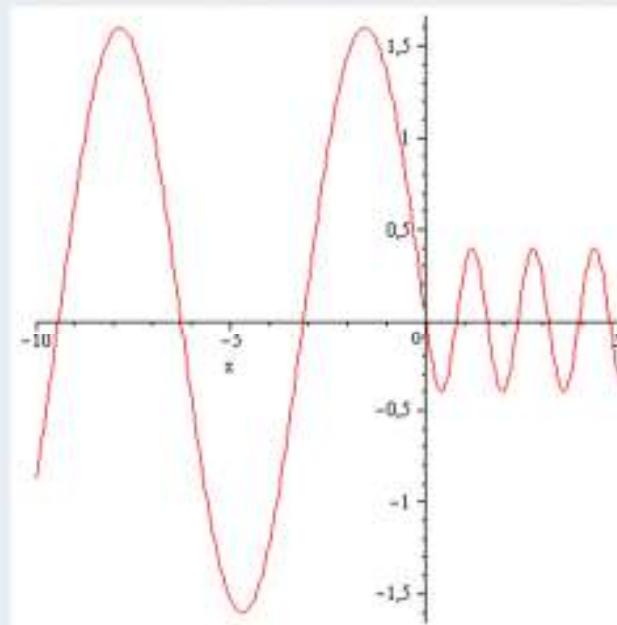
odbicie zupełne

Odbicie ze zmianą fazy



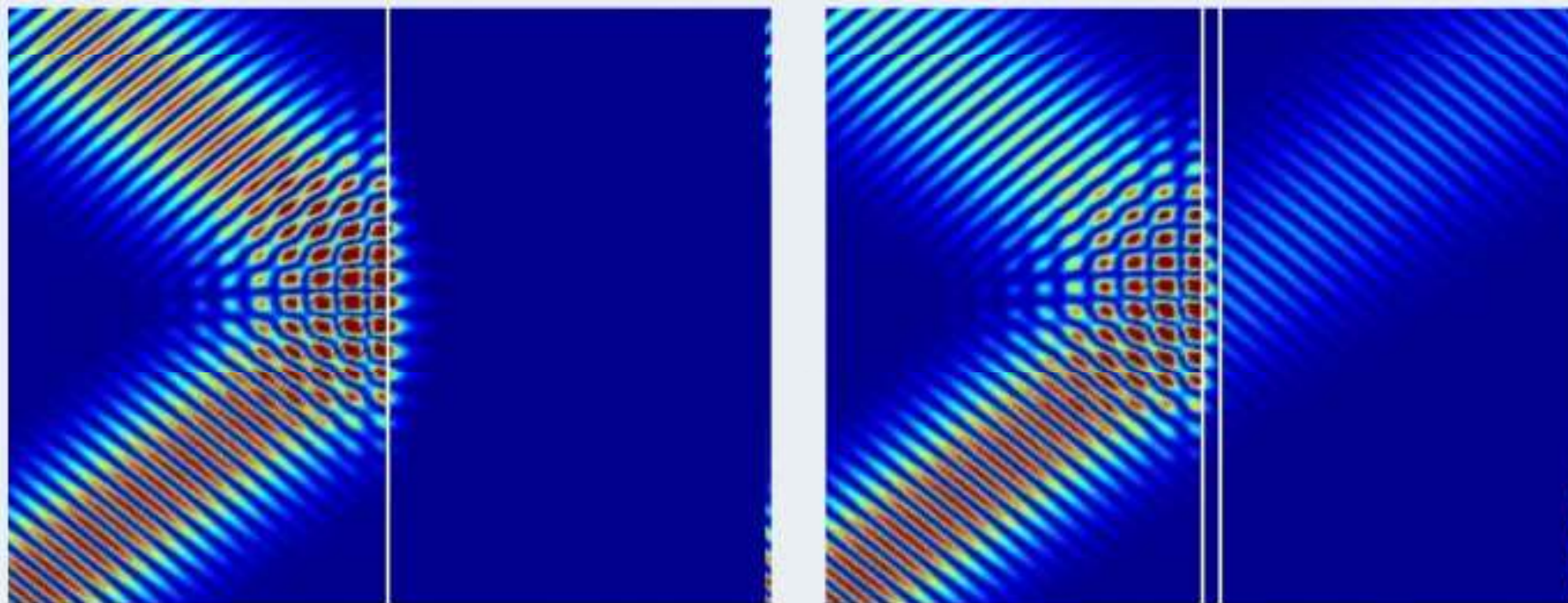
częściowe

całkowite



niezpełna fala stojąca

Wszystko za sprawą interferencji



Zjawisko odbicia jako efekt niedopasowania impedancyjnego

Akustyczna impedancja ośrodka

z równania fali płaskiej $A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$p = \rho_0 v v_0 \cos(\omega t - kx) \quad v = \frac{\partial A}{\partial t} = v_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$Z_0 = \frac{p}{v} = \frac{\rho_0 v v_0 \cos(\omega t - kx)}{v_0 \cos(\omega t - kx)} = \rho_0 v \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} \right] = [\text{rayl}]$$

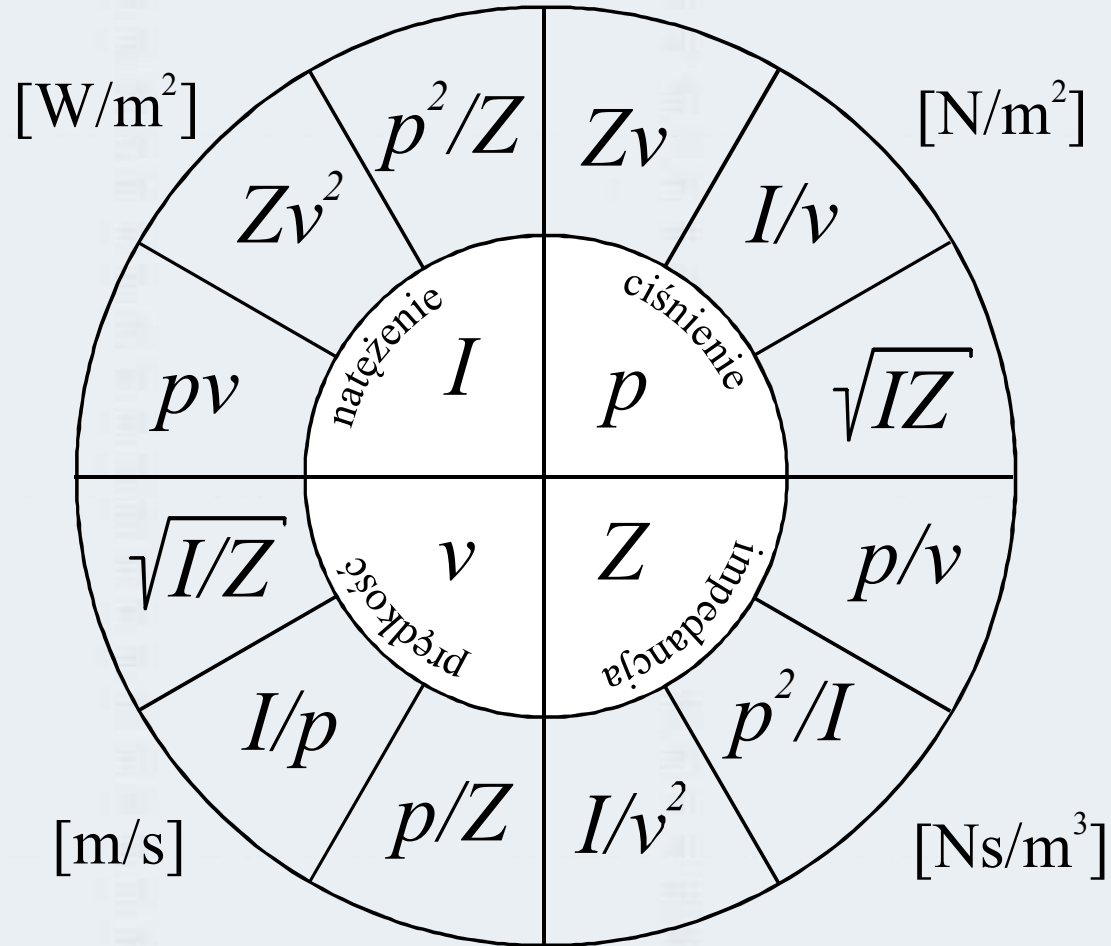
akustyczny Ohm

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

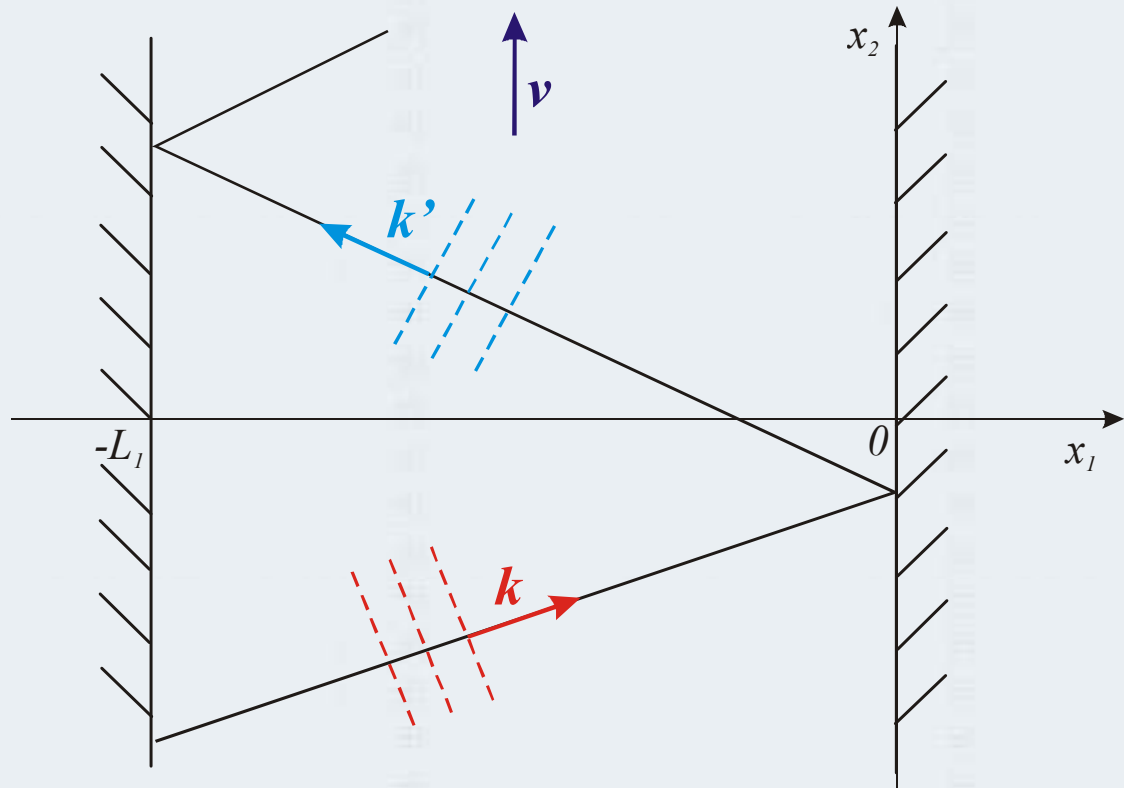
$$Z_0 = 413 [\text{rayl}] \text{ przy } 20^\circ\text{C}$$

$$Z_0 = 410 [\text{rayl}] \text{ przy } 25^\circ\text{C}$$

Związki pomiędzy wielkościami akustycznymi



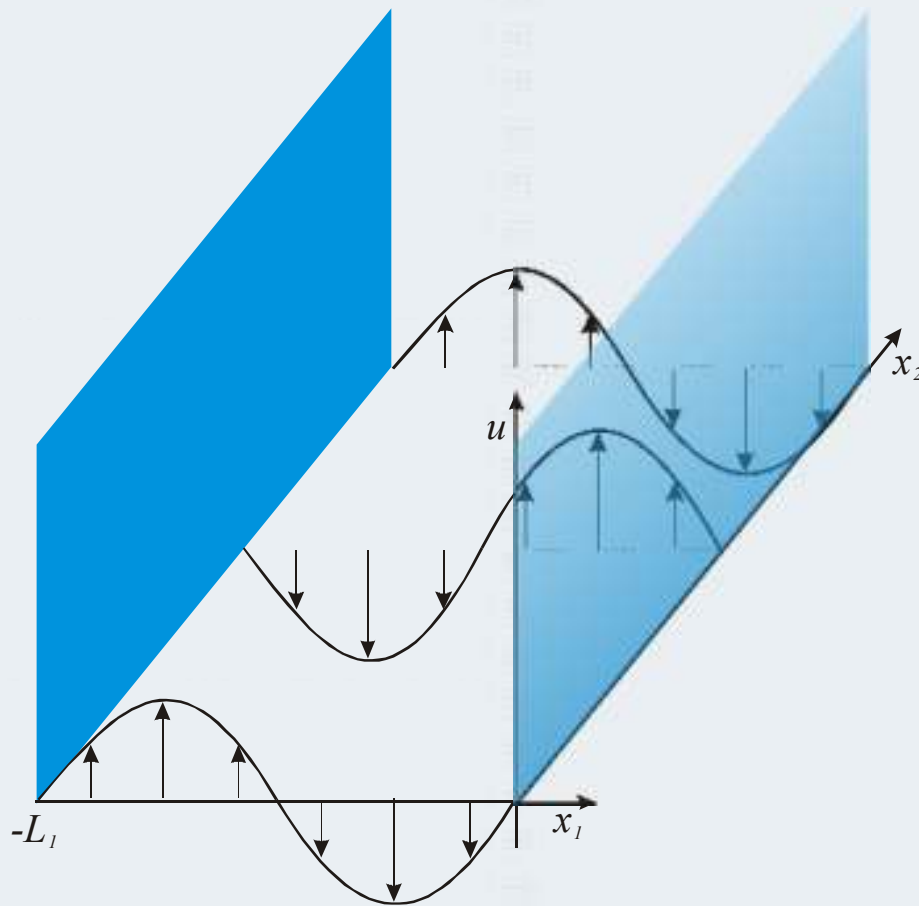
Zwykle kąt odbicia jest różny od prostego



$$u_{PAD} = A \cos(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2) \quad u_{ODB} = -A \cos(\omega t - k'_1 x_1 - k'_2 x_2)$$

suma

$$u = 2A \sin\left(\omega t - \frac{k_1 + k'_1}{2} x_1 - \frac{k_2 + k'_2}{2} x_2\right) \sin\left(\frac{k_1 - k'_1}{2} x_1 + \frac{k_2 - k'_2}{2} x_2\right)$$



n=2

$$k_G^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2$$

w falowodzie

w wolnej przestrzeni
(nieograniczonej)

dla n=1

$$\min k_G = k_C = \frac{\pi}{L_1}$$

$$\min \lambda = \lambda_C = 2L_1$$

$$\min f = f_c = \frac{v}{2L_1}$$

dyspersja!

W falowodzie mogą się propagować fale o długościach mniejszych od $2L_1$.

Zbliżanie się wartości długości do długości fali krytycznej odpowiada fizycznie zbliżaniu się kąta padania fali do wartości 90° , przy której fala zachowuje się jak w rezonatorze.

Aby jej węzły znajdowały się w miejscach odbić od prawej ściany $x_1=0$ odpowiednie składowe wektorów falowych muszą być równe co do modułu (**zasada zachowania liczby falowej**)

$$k'_1 = \pm k_1$$

Nietrywialne rozwiązanie równania uzyskać można tylko dla $k'_1 = -k_1$

$$u = 2A \sin(\omega t - k_2 x_2) \sin k_1 x_1$$

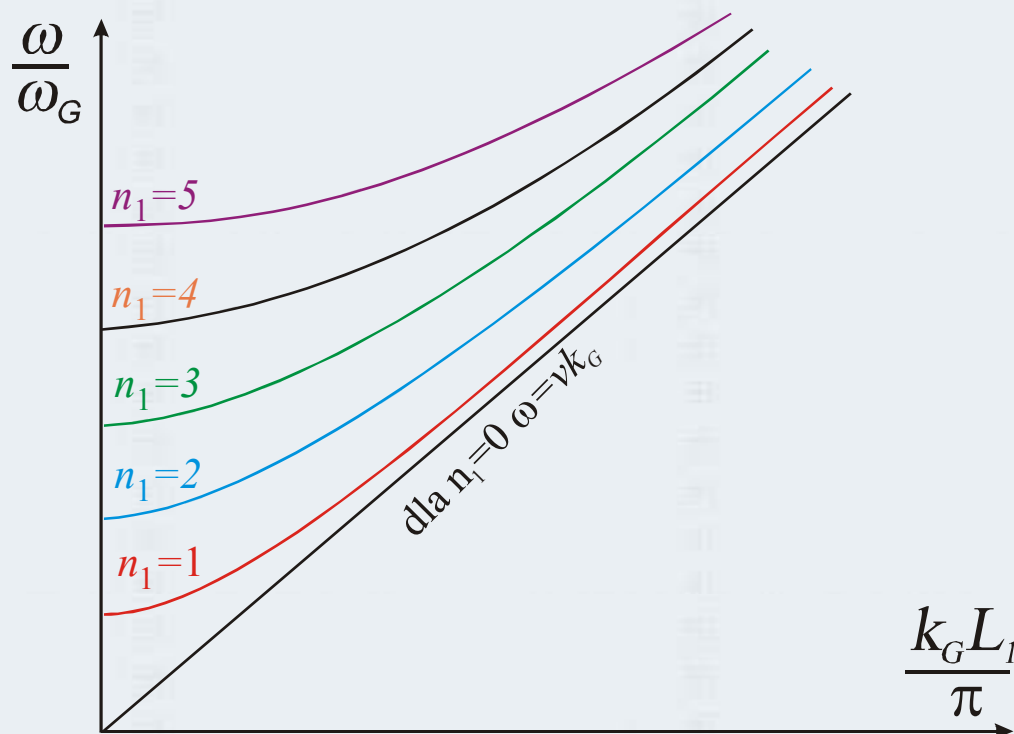
Aby węzły powstawały także w miejscach odbić od lewej ściany $x_1=-L_1$ musi spełniony być warunek:

$$k_1 = n \frac{\pi}{L_1}$$

$$u = 2A \sin(\omega t - k_2 x_2) \sin \frac{n\pi}{L_1} x_1$$

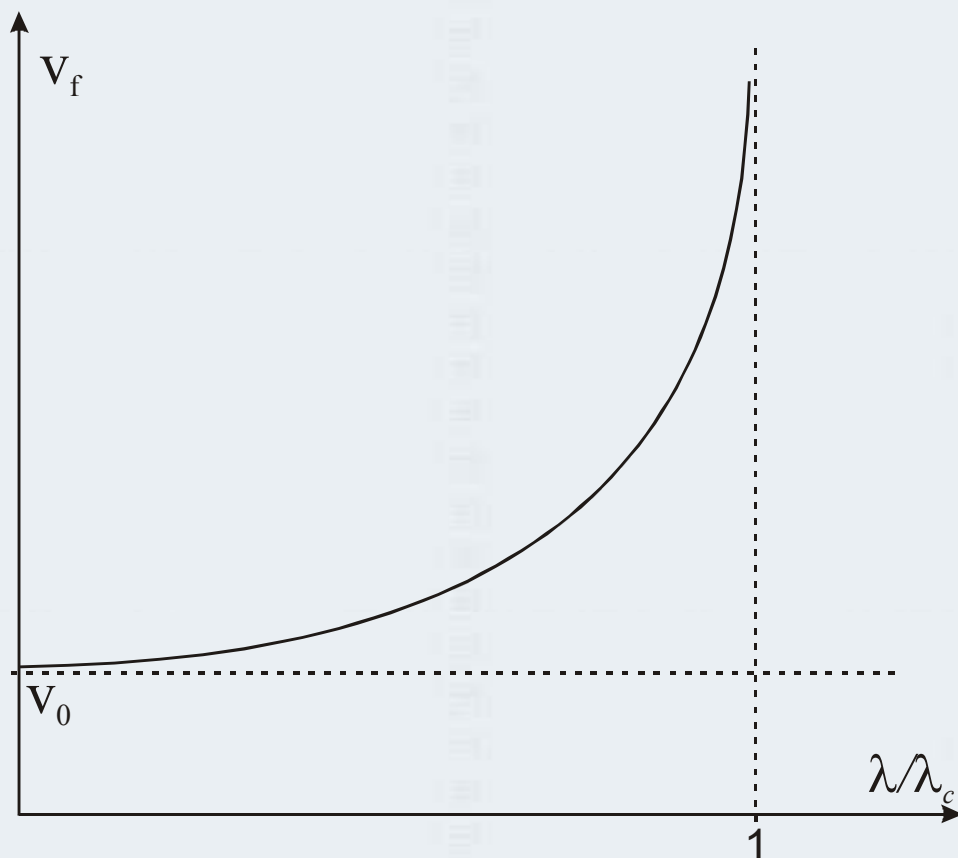
$$\omega = vk = v \sqrt{k_G^2 + \left(\frac{n_1 \pi}{L_1}\right)^2}$$

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k_G^2 + \left(\frac{n_1 \pi}{L_1}\right)^2}}$$

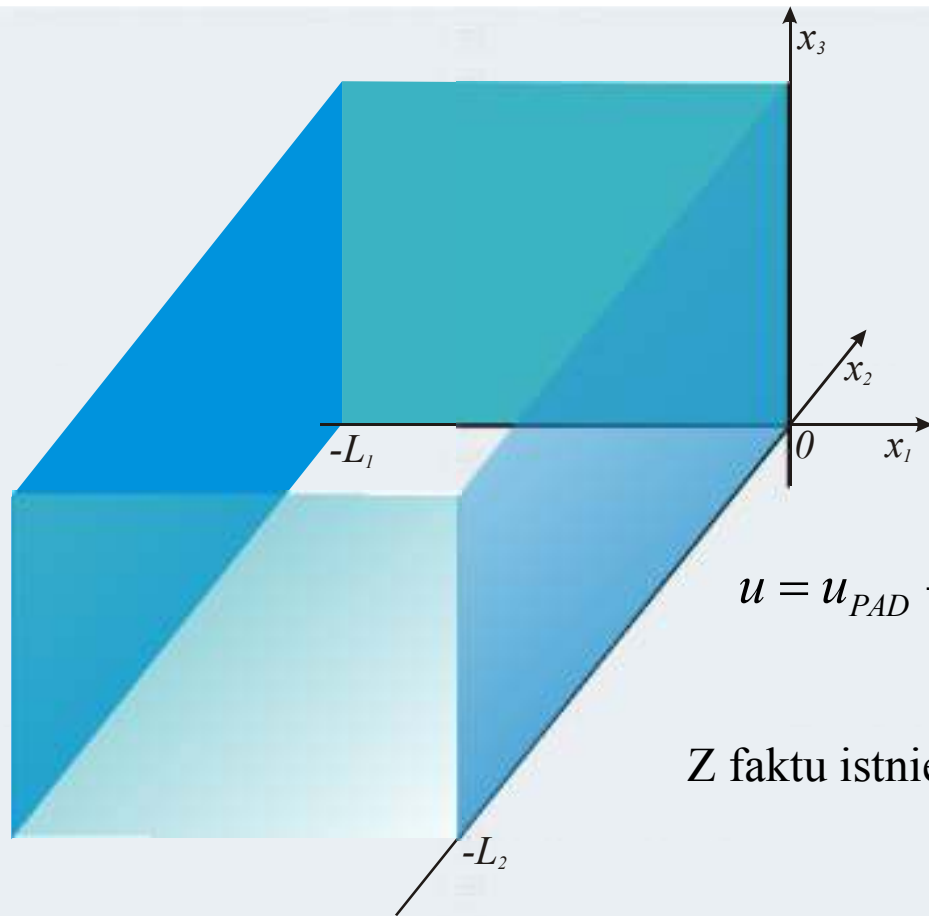


$$v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{min}}{\omega}\right)^2}}$$

$$v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2}$$



$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2$$



$$u_{PAD} = 2A \sin(\omega t - k_2 x_2) \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right)$$

$$u_{ODB} = -2A \sin(\omega t - k_2 x_2) \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right)$$

$$u = u_{PAD} + u_{ODB} = -4A \sin k_2 x_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right) \cos \omega t$$

Z faktu istnienia węzła fali w $x_2 = -L_2$ wynika $k_2 = \frac{n_2 \pi}{L_2}$

$$n_2 = 1, 2, 3 \dots$$

co po uwzględnieniu superpozycji $u = -4A \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{L_2} x_2\right) \cos \omega t$

ze związku $\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 = \mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2$ wynika $f = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2}$

Analogicznie, dokładając kolejne dwie ściany otrzyma się pudło rezonansowe z falą:

$$u = 8A \sin\left(\frac{n_1\pi}{L_1}x_1\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{L_2}x_2\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{L_3}x_3\right) \cos \omega t$$

rezonujące na częstotliwości

$$f = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2}$$

Fale akustyczne w ośrodkach sprężytych

Ośrodkiem sprężystym nazywamy każdy ośrodek, który po przyłożeniu naprężenia odkształca się wytwarzając przy tym siłę przeciwną do kierunku naprężenia.

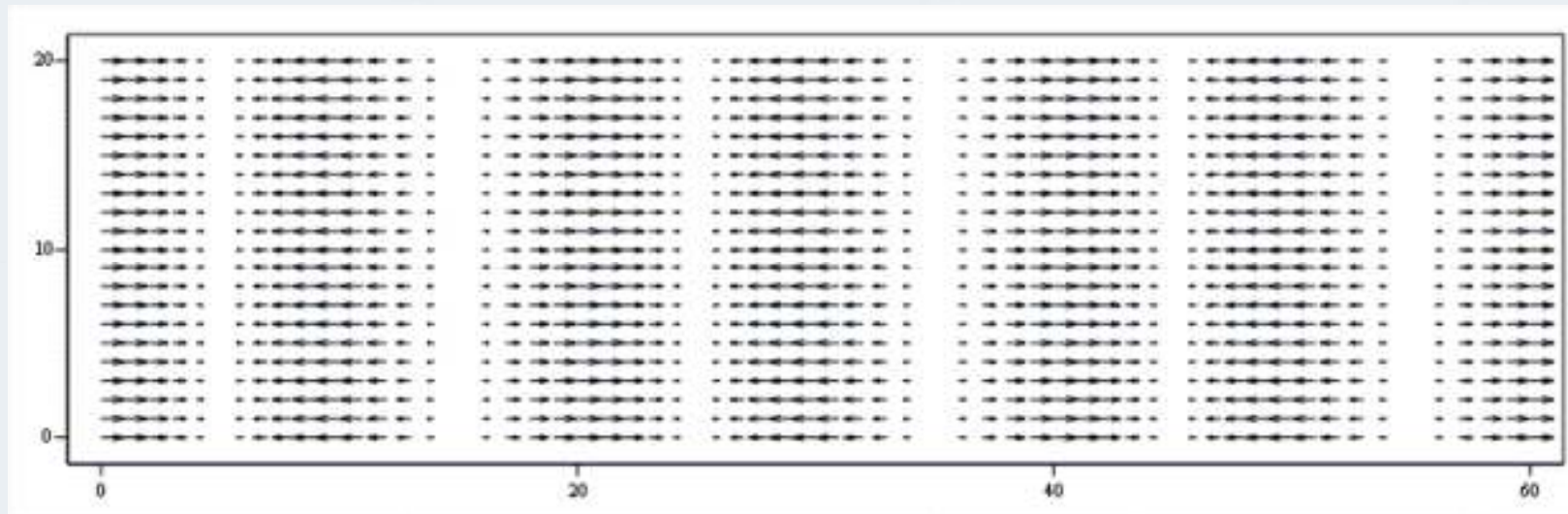
Odkształcenie oznacza zmianę rozmiarów elementu ośrodka.

Do takich ośrodków zaliczają się płyny i ciała stałe.

Związek pomiędzy naprężeniem a odkształceniem elementu ciała wyrażony jest prawem Hooke'a. Prawo to obowiązuje tylko dla małych odkształceń.

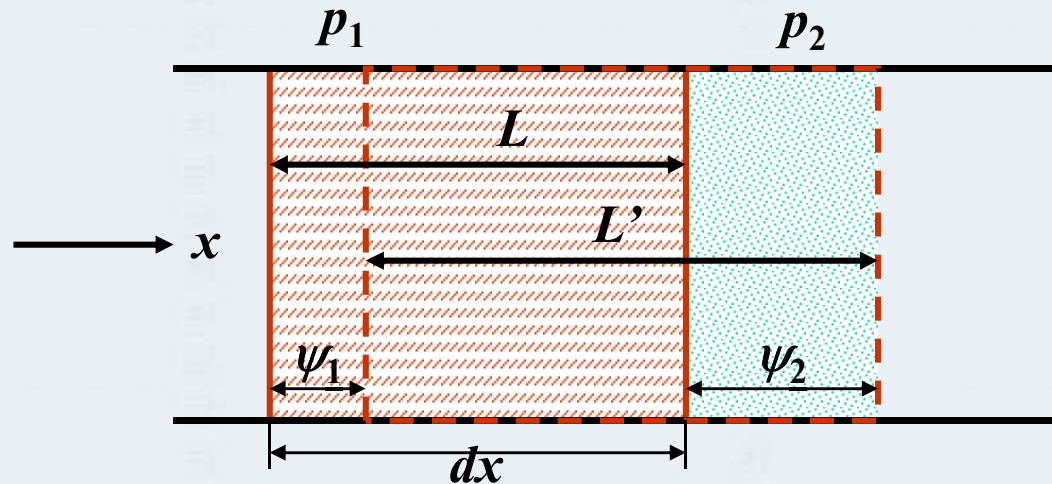
$$\sigma \sim \varepsilon$$

$$T \sim S$$



We wszystkich ośrodkach sprężystych mogą propagować się fale akustyczne (mechaniczne).

Rozpatrzmy pewną objętość płynu (cieczy lub gazu) poddaną podłużnemu zaburzeniu tzn. sprężeniu albo rozprężeniu.



Ruch cząsteczek występuje tylko w kierunku x . Rozprężenie można opisać:

$$\frac{L' - L}{L} = \frac{\partial L}{\partial L} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Rozprężenie oznacza zmniejszenie gęstości

$$-\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial L}{L} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad / \cdot -\frac{\rho}{\partial x}$$

gradient gęstości

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Zmiana gęstości prowadzi do powstania zmiany ciśnienia.

Dla małych zmian gęstości

$$\Delta p = \frac{dp}{d\rho} \Delta \rho$$

wielkość $dp/d\rho$ charakteryzuje dany ośrodek (jest stałą materiałową ośrodka) i jest odwrotnie proporcjonalna do iloczynu tzw. współczynnika ścisłości ośrodka κ oraz gęstości tego ośrodka w stanie niezaburzonym ρ_0

$$\kappa = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dp}$$

Gradient ciśnienia

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{dp}{d\rho} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Gradient ciśnienia prowadzi do powstania siły działającej na element objętości w obrębie dx .

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona można napisać

$$\rho dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -(p_2 - p_1) = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Znak minus jest związany z kierunkiem przyspieszenia, które skierowane jest w stronę mniejszych ciśnień.

W oparciu o te dwa równania otrzymuje się równanie fali akustycznej w płynie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Rozwiązaniem tego równania jest fala w płynie

$$\psi = \psi_0 \sin(\omega t - kx)$$

Prędkość tej fali jest równa

$$v = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho_0}}$$

Dla gazów można przyjąć z dobrym przybliżeniem, że zaburzenie jest przekazywane adiabatycznie.

Licząc prędkość fali akustycznej w gazie można więc skorzystać z równania przemiany adiabatycznej.

$$pV = nRT = \text{const}$$

$$V^\chi dp + \chi V^{\chi-1} p dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dV} = -\chi \frac{p}{V}$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \chi \frac{p}{\rho} = \chi \frac{RT}{\mu} \quad \chi = \frac{c_p}{c_v}$$

$$p = \frac{RT}{V_M}$$

$$v = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{RT}{M_M}}$$

Materiał	Gęstość [kg/m ³]	Prędkość [m/s]
Powietrze suche -20 °C	1,396	319
Powietrze suche 0 °C	1,293	331
Powietrze suche 20 °C	1,21	344
Powietrze suche 100 °C	0,947	387
Wodór 0 °C	0,090	1260
Para wodna 130 °C	0,54	450
Hel 0 °C	0,179	971

Fale akustyczne w ciałach stałych

Fale akustyczne w strunie

prędkość fali w strunie

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

T tzw. napięcie struny

ρ gęstość materiału, z którego struna jest wykonana

Założmy, że rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego ma następującą ogólną postać:

$$u(t, x) = (A \sin kx + B \cos kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

Struna jest zamocowana na końcach, z czego wynikają następujące warunki brzegowe:

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=L} = 0$$

Po podstawieniu tych w. b. do założonego rozwiązania uzyskuje się następujący układ równań:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \\ A \sin kL + B \cos kL = 0 \end{cases}$$

Po obustronnym podzieleniu przez $\sin(\omega t + \varphi)$ czynnik ten znika! Klasyczny przykład fali stojącej.

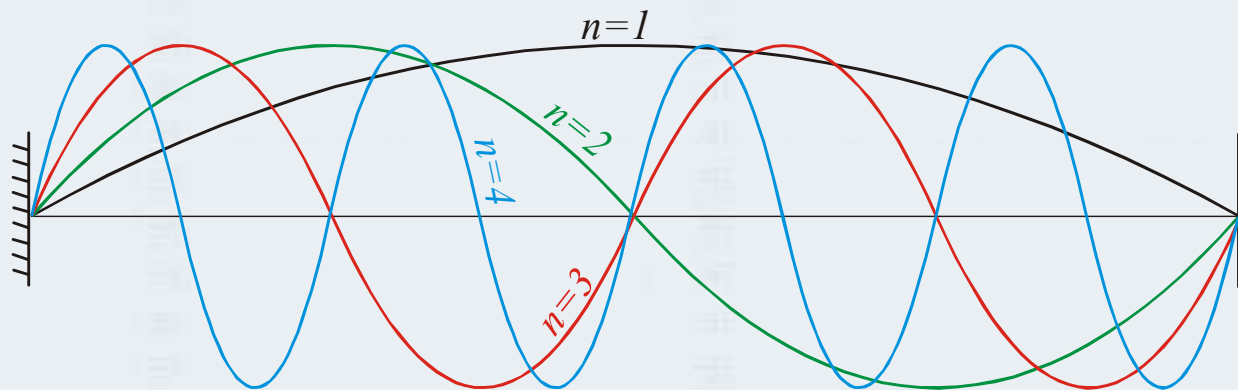
Wyznacznik tego układu ma postać:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{vmatrix}$$

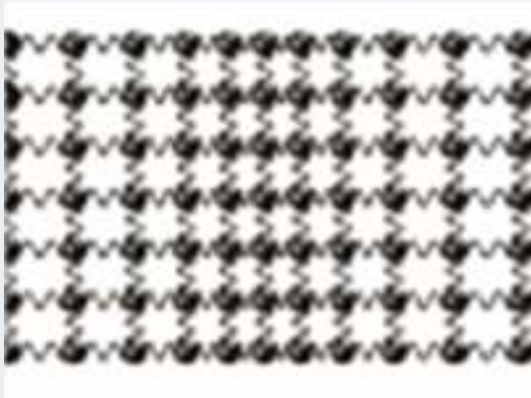
Przyrównując ten wyznacznik do zera otrzyma się wyrażenie na tzw. **wartości własne zagadnienia** (eigenvalues). Fizycznie interpretowane są one jako wszystkie możliwe drgania układu.

$$\sin kl = 0 \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l} \quad n=1, 2, 3 \dots$$

$$\text{ponieważ } k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n}$$



Objętościowe fale akustyczne w ciałach stałych



Prędkość rozchodzenia się fal sprężystych określona jest przez wzór Newtona

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E jest wyznaczanym empirycznie modułem sprężystości (moduł Younga)

Dla fal podłużnych rolę modułu sprężystości pełni zwykle moduł ściśliwości K , zaś dla fali poprzecznej moduł sztywności G .

Moduł sprężystości równa się z def. $E = \frac{F}{s} : \frac{\Delta l}{l}$ z tego $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{s}$

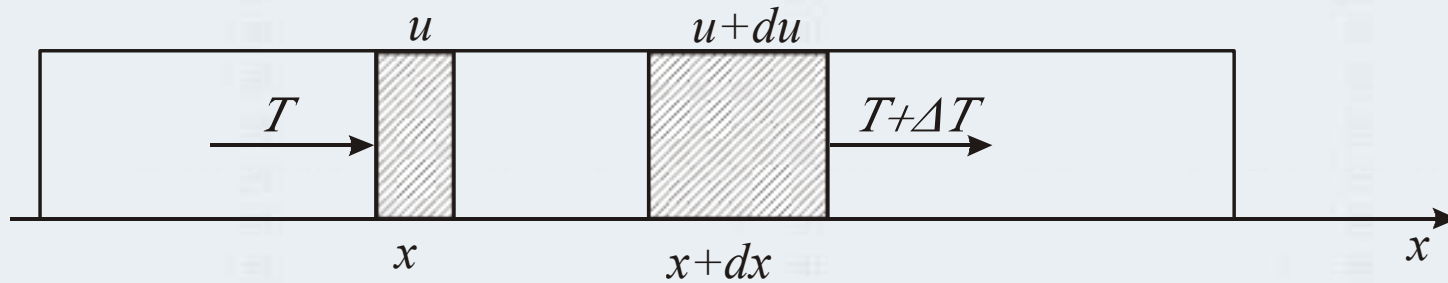
F jest siłą, s powierzchnią przekroju, l długością ośrodka, zaś Δl spowodowanym przez falę jego wydłużeniem.

Stosunek F/s nazywa się naprężeniem i ozn. symbolem T (ang. słowa tension), zaś stosunek $\Delta l/l$ nazywany jest odkształceniem (albo deformacją) i ozn. przez S ; Powyższe równanie można więc przedstawić jako proporcjonalność odkształceń do naprężeń.

$$S = \frac{1}{E} T$$

Twierdzenie o takiej proporcjonalności nazywa się prawem Hooke'a i **obowiązuje tylko dla małych odkształceń.**

Rozważmy propagację fali podłużnej w pręcie o przekroju S i długości l



W pewnej chwili t wychylenie w punkcie x wynosi u zaś w punkcie $x+dx$ $u+du$.
Wychylenie w punkcie x spowodowane jest naprężeniem T , a w punkcie $x+dx$ $T+\Delta T$.
Pręt na dystansie dx wydłużył się o du :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{stąd} \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Z prawa Hook'a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} T$$

Rozpatrzmy ruch elementu masy pręta zawartej na odcinku pomiędzy x a $x+dx$.
Element ten ma postać:

$$dm = s \rho dx$$

Po podziałaniu na obydwie strony równania operatorem przyspieszenia:

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Z II zasady dynamiki Newtona wiadomo, że lewa strona równania jest siłą działającą na element masy dm .

Z kolei naprężenie to stosunek działającej siły do przekroju. Siłę działającą na element dm można również przedstawić jako różnicę iloczynów naprężeń i przekrojów na dystansie dx :

$$F = s(T + dT) - sT = s \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - sT = s \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{1}{E} T \quad / \cdot \partial x \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}$$

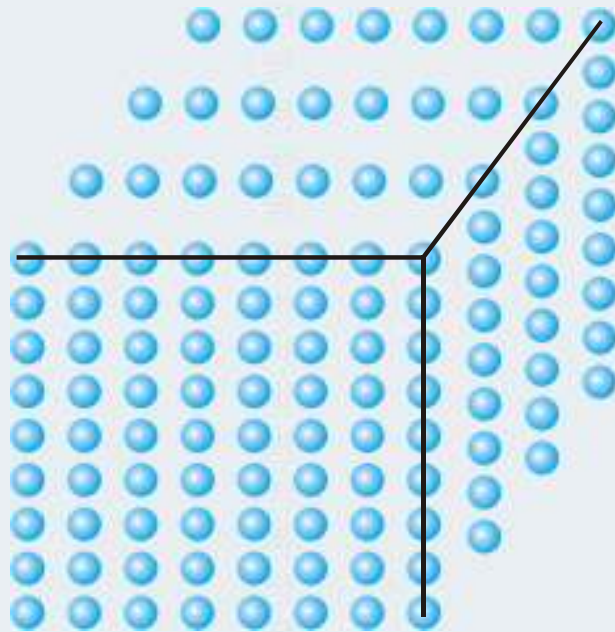
ze wzoru Newtona $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ \longrightarrow

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}$$

Jest to jednowymiarowe równanie falowe. Łatwo je można uogólnić na przypadek trójwymiarowy:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 \mathbf{u}$$

Przedstawione wcześniej prawo Hookea $S = \frac{1}{E} T$ nie rozróżnia kierunków i może być stosowane jedynie dla struktur liniowych.

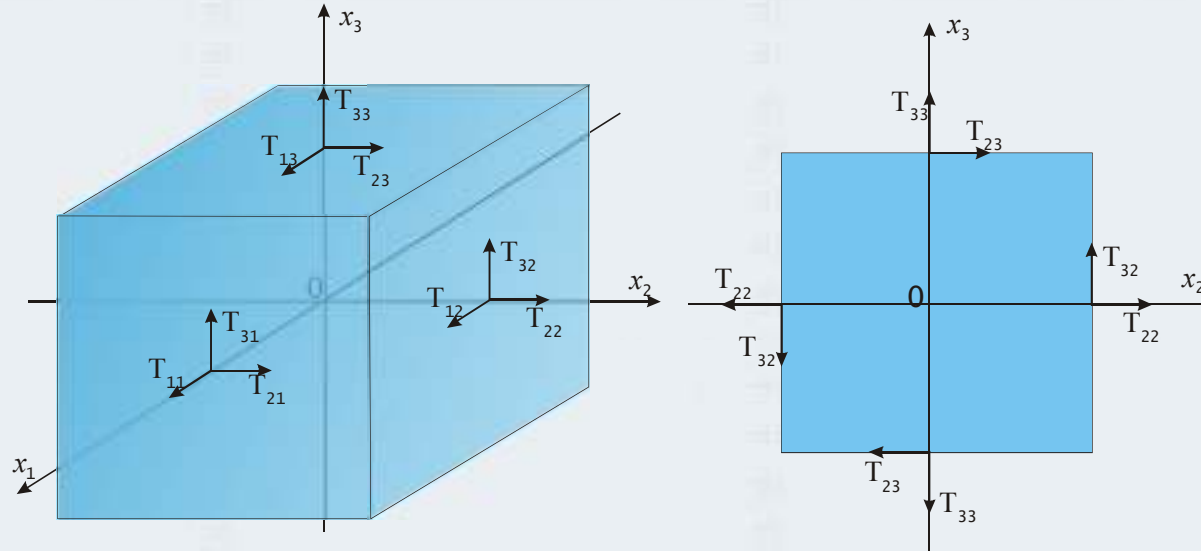


W takim ciele sztywność zależy od kierunku.

Zależność własności fizycznych materiału od kierunku nazywa się **anizotropią**.

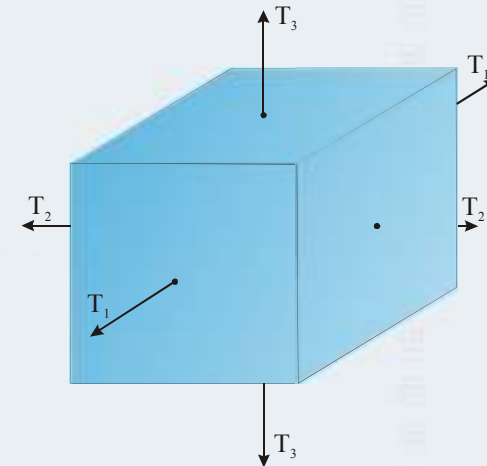
W ciele anizotropowym każdy kierunek należałoby rozpatrywać oddzielnie.

Ok. 1910 r. Wolfgang Voigt wprowadził pojęcie tensora umożliwiające rozpatrywanie wszystkich kierunków jednocześnie.



Sześcian jednostkowy dostatecznie mały aby występujące w nim naprężenia były jednorodne i jego przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi x_1 oraz działające nań siły. Naprężenia T_{ii} są typu ściskającego natomiast T_{ij} ścinającego. Z symetrii tensora naprężeń wynika możliwość sprowadzenia go do tzw. osi głównych tj. takich, dla których znikają naprężenia typu ścinającego:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$



Zabieg ten sprowadza się do takiego wyboru układu współrzędnych, dla którego krawędzie sześcianu jednostkowego są równoległe do trzech głównych kierunków naprężeń.

Stosując zapis tensorowy, dla ciał anizotropowych prawo Hooke'a można wyrazić następująco

$$T_{ij} = \sum_k \sum_l C_{ijkl} S_{kl}$$

Powszechnie przyjęto umowę o opuszczaniu sumowania po powtarzających się wskaźnikach (tzw. konwencja sumacyjna Einsteina).

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}$$

C_{ijkl} jest tensorem sztywności (in. stałych sprężystych) i charakteryzuje własności sprężyste ciała anizotropowego we wszystkich kierunkach.

Tensor deformacji S_{kl} jest symetryczny, co wynika z symetrii ciał:

$$S_{kl} = S_{lk}$$

Co redukuje liczbę jego niezależnych składowych z 9 do 6.

Symetria S_{kl} implikuje symetrię C_{ijkl}

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

co redukuje liczbę składowych z 81 do 21. Dla kryształów kubicznych (perowskity) liczba niezależnych składowych redukuje się do 3.

Szczególnym przypadkiem są materiały izotropowe (o własnościach niezależnych od kierunku), dla których tensor sztywności redukuje się do dwóch stałych Lamé λ i μ

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Prawo Hooke'a nie zależy od czasu ale można go zdynamizować stosując II zasadę dynamiki

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Z def. naprężeń $F_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \longrightarrow \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad m = \rho V$

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} \quad S_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \longrightarrow T_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad T_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad \longrightarrow \quad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}$$

Równanie to ma postać równania falowego dla funkcji Ψ , która ma w ogólności postać fali płaskiej. Każde odkształcenie zmienne w czasie jest więc w ciele stałym źródłem fali.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi$$

laplasjan jest 3D

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$

o ogólnym rozwiązaniu

$$\mathbf{u} = A e^{[ik(l_i x_i - vt)]}$$

Jednorodne fale płaskie tego typu nazywane są falami objętościowymi.

Podstawienie tego rozwiązania do równania falowego pozwala znaleźć prędkości fazowe tych fal.

Są to trzy fale propagujące się w trzech prostopadłych kierunkach: jedna podłużna i dwie poprzeczne (o równych prędkościach propagacji)

$$v_l = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad v_t = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

dla większości ciał

$$v_t \approx 0,63 v_l$$

analogi wzoru Newtona dla ciała anizotropowego

W ciele izotropowym wszystkie kierunki są równoważne

oznaczmy $C_{1111} = \lambda + 2\mu, C_{1122} = \lambda, C_{2323} = \mu$

albo wykorzystując umowę o skróconym zapisie $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, C_{12} = \lambda, C_{44} = \mu$$

po wprowadzeniu stałych Lamé do równania falowego w miejsce \hat{C} i rozpisaniu równania na składowe otrzymamy:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2 \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3 \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i}\end{aligned}$$

w zapisie wektorowym $\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$

Jeśli ośrodek jest nieściśliwy (brak zmian objętości) $\text{div } \mathbf{u} = 0$ to równanie redukuje się do postaci równania fal poprzecznych

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$$

Jeśli ośrodek jest bezwirowy $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ to równanie redukuje się do postaci równania fal podłużnych

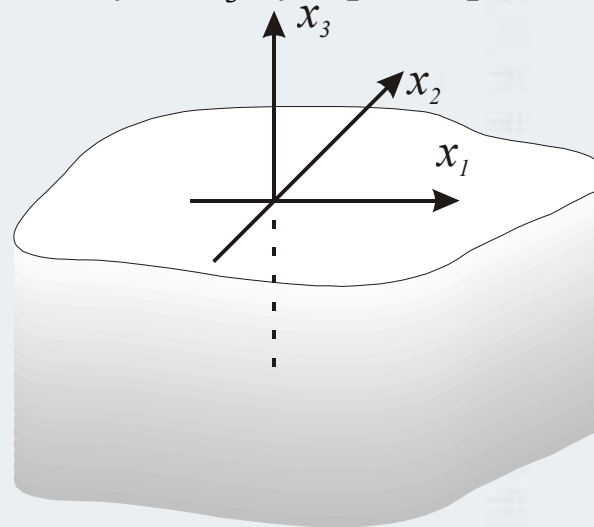
$$\text{grad div } \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} \text{ rot rot } \mathbf{u} = \left. \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \text{rot } \mathbf{u} = 0 \end{array} \right|$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u} \quad v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$$

Są to fale czysto poprzeczne i czysto podłużne. W ciałach anizotropowych przemieszczenia cząstek medium nie są na ogół prostopadłe ani równoległe do kierunku propagacji fali (czyste).

Każde ograniczenie przestrzeni generuje ośrodek propagacji nowych rodzajów fal

Przetnijmy przestrzeń sprężystą na pół i ulokujmy uzyskaną półprzestrzeń w kartezjańskim układzie współrzędnych tak aby oś x_3 była prostopadłą do powierzchni



Poszukiwać będziemy fal płaskich ($u_2=0$) propagujących się w kierunku x_1 i zanikających w głąb podłoża; równania fal przyjmą postać:

$$v_t^2 \nabla^2 u_1 + (v_l^2 - v_t^2) u_{1,11} u_{3,31} - u_{1,tt} = 0$$

$$v_t^2 \nabla^2 u_3 + (v_l^2 - v_t^2) u_{1,13} u_{3,33} - u_{3,tt} = 0$$

przy czym obecnie laplasjan jest 2D i ma postać $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}$

Często w miejsce wektora przemieszczeń wprowadza się jego postać potencjałową

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \Phi$$

↑ ↓
potencjał skalarny potencjał wektorowy

szczególna postać potencjału dla fal płaskich ma postać:

$$u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,3}$$

$$u_3 = \varphi_{,3} + \psi_{,1}$$

obydwa potencjały są tutaj skalarami; po ich podstawieniu do równań falowych

$$v_l^2 \nabla^2 \varphi - \varphi_{,tt} = 0$$

$$v_t^2 \nabla^2 \psi - \psi_{,tt} = 0$$

w.b.

$$T_{33} = 0, T_{31} = 0$$

po rozpisaniu i podstawieniu potencjałów

$$T_{33} = (\lambda + 2\mu)\varphi_{,33} + \lambda\varphi_{,11} - 2\mu\psi_{,13} = 0$$

$$T_{31} = \mu(2\varphi_{,13} - \psi_{,11} + \psi_{,33}) = 0$$

poszukiwać będziemy fal płaskich zanikających z głębokością o ogólnej postaci

$$\varphi = Ae^{-\alpha x_3 + i(kx_1 - \omega t)}$$

$$\psi = Be^{-\beta x_3 + i(kx_1 - \omega t)}$$

$$A[(\lambda + 2\mu)\alpha^2 - \lambda k^2] + 2iB\mu k\beta = 0$$

$$-2iAk\alpha + B(\beta^2 + k^2) = 0$$

współczynniki zanikania wyrazić można poprzez wektor falowy, w tym celu poszukiwane postacie fal wstawia się do równań ruchu, żądając ich spełnienia; stąd

$$\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_l^2}, \quad \beta^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_t^2}$$

$$A \left[(\lambda + 2\mu) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{v_l^2} \right) - \lambda k^2 \right] + 2iB\mu k \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v_t^2}} = 0$$

$$-2iAk \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v_l^2}} + B \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{v_t^2} \right) = 0$$

przyrównując wyznacznik układu do 0 otrzymuje się następujące równanie charakterystyczne (dyspersyjne):

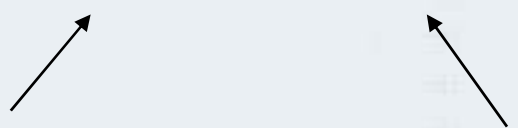
$$\left(2 - \frac{\omega^2}{k^2 v_t^2} \right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2 v_l^2}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2 v_t^2}} = 0$$

ponieważ $v = \frac{\omega}{k}$

$$\left(2 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_l^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_t^2}} = 0$$

równanie to posiada nietrywialne rozwiązania tylko dla $0 < v < v_t$, w szczególności dla ciał spotykanych w przyrodzie o określonych stałych Lamé (i prędkościach fal objętościowych) prędkość v przyjmuje wartości:

$$0,874v_t < v < 0,995v_t$$



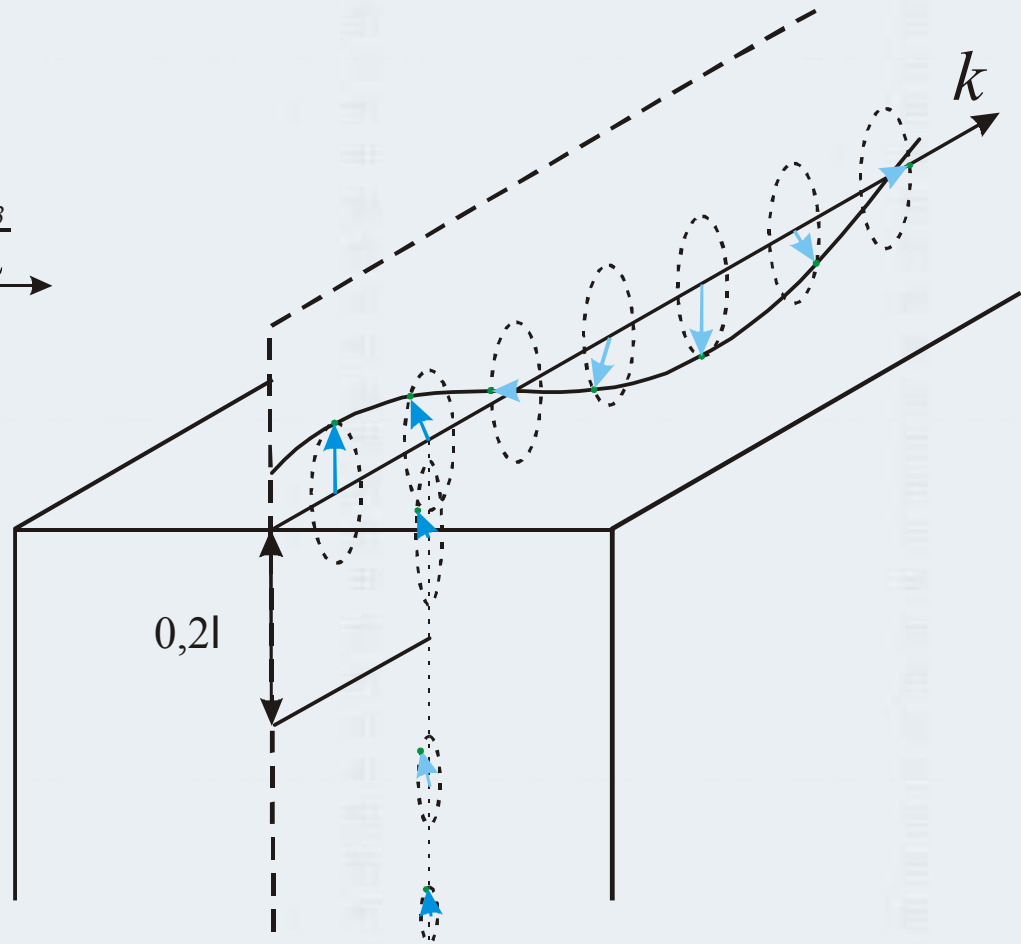
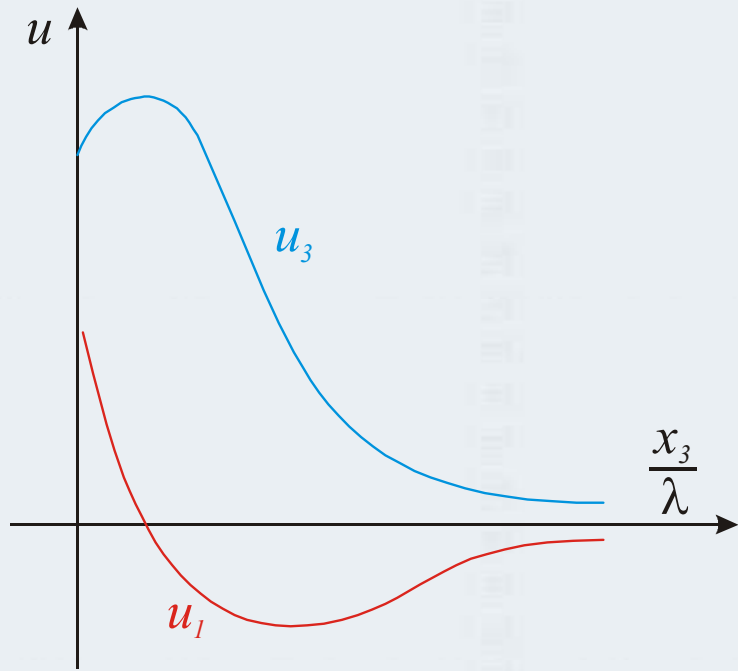
ciała ściśliwe ciała nieściśliwe

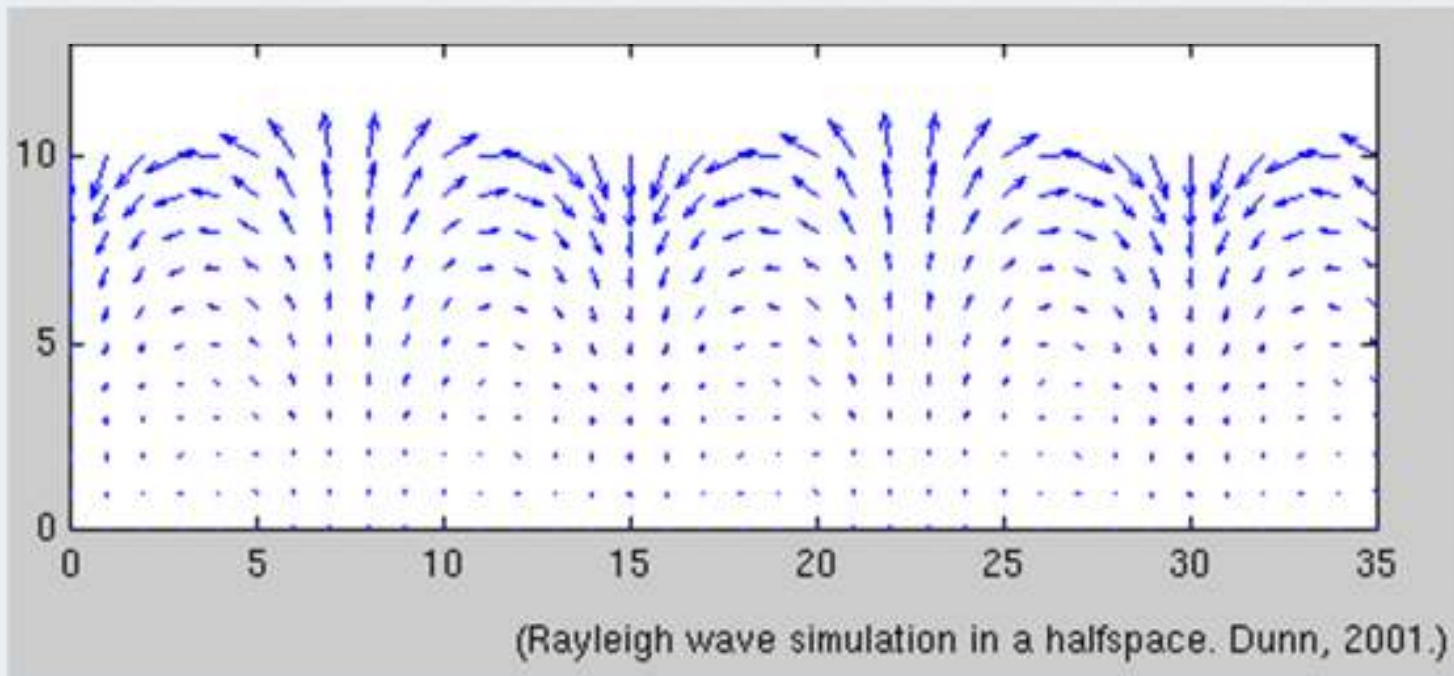
Przy powierzchni propagować się może fala, która nie jest ani poprzeczna ani podłużna. Wektory przemieszczeń tej fali mają postać:

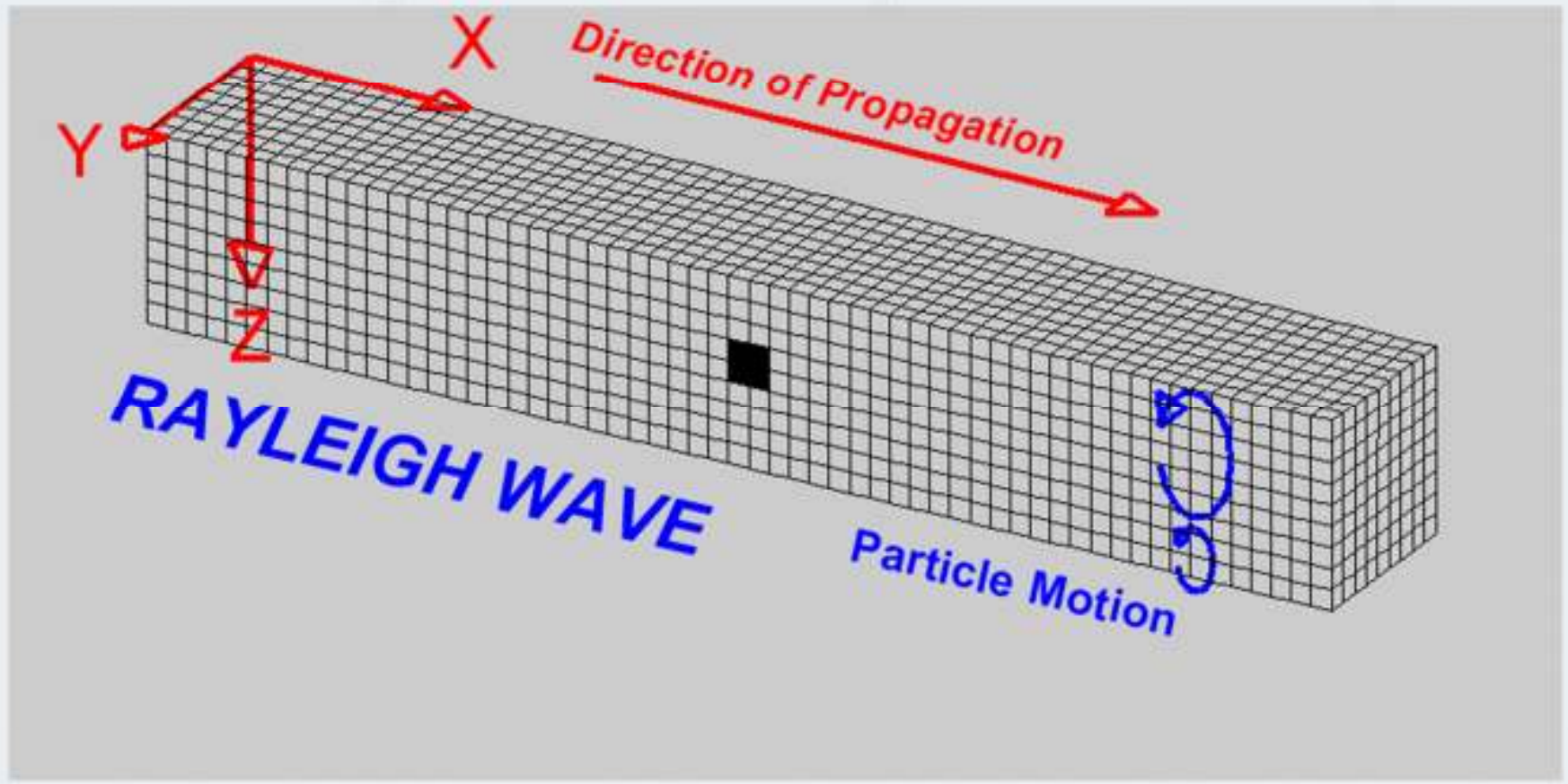
$$u_1 = Ae^{-x_3\sqrt{k^2-k_t^2}} \cos(kx - vt)$$

$$u_3 = Be^{-x_3\sqrt{k^2-k_t^2}} \sin(kx - vt)$$

Fala to nosi nazwę fali Rayleigha

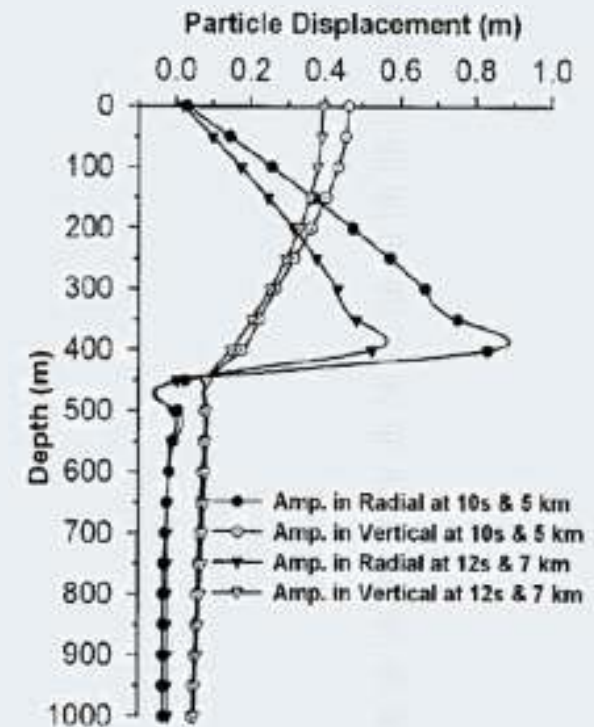






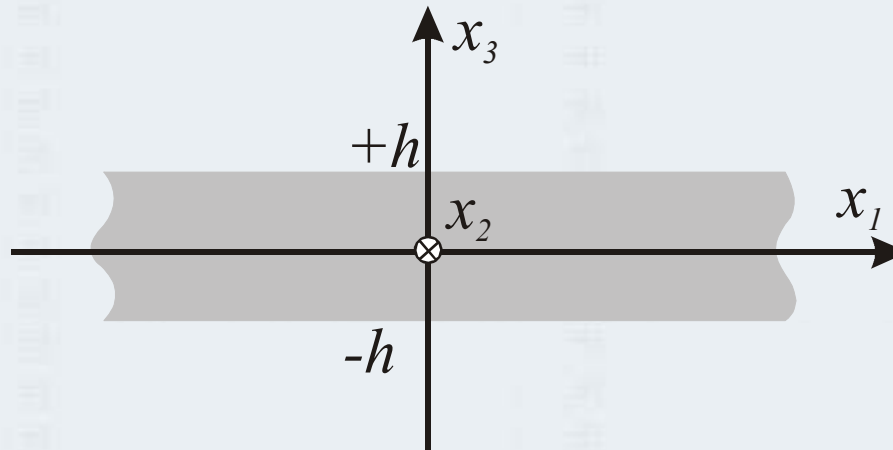
Najważniejsze własności fali Rayleigha

- amplituda zanika wraz z oddalaniem się od powierzchni na dystansie rzędu λ
- amplituda jest rzędu ułamka długości fali nawet $\sim \lambda^{-5}$
- fala ta posiada tylko dwie składowe (brak składowej poprzecznej)
- fala ta posiada polaryzację eliptyczną
- wektor przemieszczeń zatacza trajektorie eliptyczne w kierunku przeciwnym do ruchu fali
- jest to fala płaska, fronty falowe są liniami prostymi (ew. odcinkami) – słabe tłumienie
- $0,874v_t < v < 0,995v_t$
- jest przypowierzchniowym złożeniem modów poprzecznych i wzdłużnych



Każde ograniczenie przestrzeni generuje ośrodek propagacji nowych rodzajów fal

Ograniczmy półprzestrzeń sprężystą do warstwy (płyty) o grubości $2h$ i ułokujmy ją w kartezjańskim układzie współrzędnych tak aby oś x_3 była prostopadła do powierzchni



Poszukujemy nowego rodzaju fal propagujących się w kierunku x_1 o prędkości v różnej od v_l i v_t .

Ponieważ jak dla fali Rayleigha problem jest płaski zastosujemy potencjały:

$$u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,3}$$

$$u_3 = \varphi_{,3} + \psi_{,1}$$

spełniające równania:

$$v_l^2 \nabla^2 \varphi - \varphi_{,tt} = 0$$

$$v_t^2 \nabla^2 \psi - \psi_{,tt} = 0$$

naprężenia wyrażą się jak poprzednio poprzez:

$$T_{33} = (\lambda + 2\mu) \varphi_{,33} + \lambda \varphi_{,11} - 2\mu \psi_{,13} = 0$$

$$T_{31} = \mu (2\varphi_{,13} - \psi_{,11} + \psi_{,33}) = 0$$

w.b. $T_{33} = T_{31}$ dla $x_3 = \pm h$

Rozwiązań równań falowych $v_l^2 \nabla^2 \varphi - \varphi_{,tt} = 0$ poszukiwać będziemy w postaci:

$$v_t^2 \nabla^2 \psi - \psi_{,tt} = 0$$

$$\varphi = \Phi(x_3) e^{-i(kx_1 - \omega t)}$$

$$\psi = \Psi(x_3) e^{-i(kx_1 - \omega t)}$$

Wstawiając prognozowane rozwiązania do równań falowych otrzymamy układ:

$$\Phi_{,33} - (k^2 - k_l^2) \Phi = 0$$

$$\Psi_{,33} - (k^2 - k_t^2) \Psi = 0$$

którego rozwiązania mają postać:

$$\Phi(x_3) = A \sinh \sqrt{k^2 - k_l^2} x_3 + B \cosh \sqrt{k^2 - k_l^2} x_3$$

$$\Psi(x_3) = C \sinh \sqrt{k^2 - k_t^2} x_3 + D \cosh \sqrt{k^2 - k_t^2} x_3$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Podstawiając te rozwiązania do rozwiązań prognozowanych oraz do wyrażenia na potencjały można wyznaczyć wektor przemieszczeń dla nowej fali i korzystając ze wzorów na naprężenia wyrazić na nowo w.b.

Otrzyma się w ten sposób układ 4 równań jednorodnych względem współczynników A , B , C i D . Rozwiązanie tego układu istnieje jeśli jego wyznacznik jest równy 0. Otrzymuje się w ten sposób równanie charakterystyczne pozwalające wyznaczyć prędkość nowej fali.

Dyskusja całego rozwiązania jest złożona.

Rozpatrzmy dwa szczególne (i zarazem najprostsze) przypadki kiedy przemieszczenia na powierzchniach warstwy są względem płaszczyzny x_3 symetryczne i antysymetryczne.



W przypadku symetrycznym symetryczne są naprężenia T_{33} natomiast T_{31} będą antysymetryczne.

W takim przypadku ogólną postać rozwiązań można zredukować do:

$$\varphi_1(x_3) = B \cosh \sqrt{k^2 - k_t^2} x_3 e^{i(\omega t - kx_1)}$$

$$\psi_1(x_3) = C \sinh \sqrt{k^2 - k_t^2} x_3 e^{i(\omega t - kx_1)}$$

Dzięki symetrii wystarczy spełnić w.b. tylko w jednej płaszczyźnie ograniczającej warstwę stąd układ:

$$\begin{aligned} -(\rho\omega^2 - 2\mu k^2) B \cosh \sqrt{k^2 - k_t^2} h - 2i\mu k \sqrt{k^2 - k_t^2} C \cosh \sqrt{k^2 - k_t^2} h &= 0 \\ -2ik \sqrt{k^2 - k_t^2} B \sinh \sqrt{k^2 - k_t^2} h - \left(\sqrt{k^2 - k_t^2} + k^2 \right) \sinh \sqrt{k^2 - k_t^2} h &= 0 \end{aligned}$$

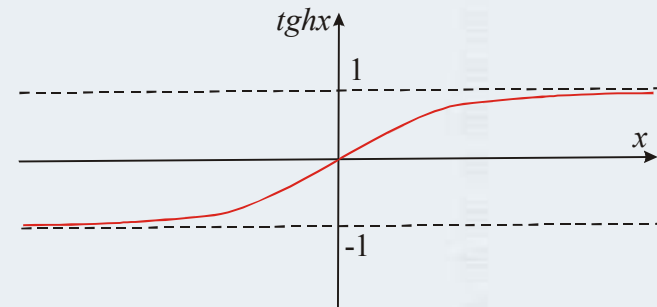
generujący równanie dyspersyjne (charakterystyczne) w postaci:

$$\frac{\operatorname{tgh} \sqrt{k^2 - k_t^2} h}{\operatorname{tgh} \sqrt{k^2 - k_t^2} h} - \frac{\left(2 - \frac{v^2}{v_t^2} \right)^2}{4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_l^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_t^2}}} = 0$$

dla cienkich warstw (małe kh) można tgh aproksymować ich argumentami, wtedy równanie dyspersyjne uprości się do postaci:

$$\left(\sqrt{k^2 - k_t^2} + k^2 \right)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - k_t^2} = 0$$

stąd
$$v = 2\sqrt{v_l^2 - v_t^2}$$



Jeśli zaś warstwa jest gruba $\lambda \ll h$ to kh są duże i stosunek tgh w równaniu dyspersyjnym jest w przybliżeniu równy 1.

W takim wypadku otrzymuje się równanie dyspersyjne jak dla fali Rayleigha.

Dla modów antysymetrycznych T_{33} będą także antysymetryczne, zaś T_{31} symetryczne i rozwiązania próbne przyjmą postać:

$$\varphi_2(x_3) = A \sinh \sqrt{k^2 - k_l^2} x_3 e^{i(\omega t - kx_1)}$$

$$\psi_2(x_3) = D \cosh \sqrt{k^2 - k_t^2} x_3 e^{i(\omega t - kx_1)}$$

Analogicznie jak dla modów symetrycznych dochodzi się do równania dyspersyjnego, które tym razem przyjmie postać:

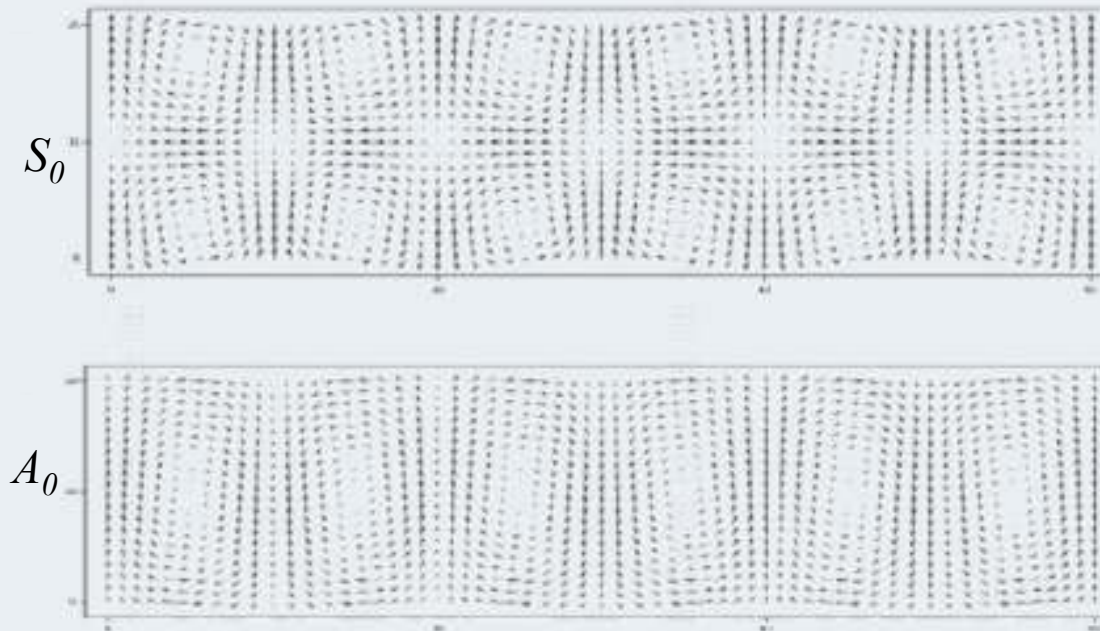
$$\frac{tgh \sqrt{k^2 - k_l^2} h}{tgh \sqrt{k^2 - k_t^2} h} - \frac{4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_l^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_t^2}}}{\left(2 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)^2} = 0$$

Dla płyt cienkich (długich fal) po rozwinięciu tgh w szereg i odrzuceniu wyrazów małych:

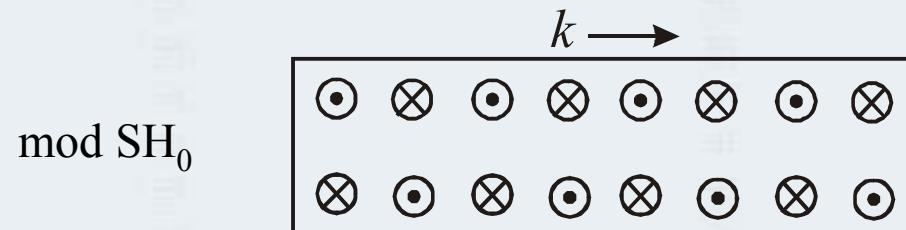
$$\frac{v^2}{v_t^2} = \frac{4}{3} (kh)^2 \left(1 - \frac{v_t^2}{v_l^2}\right)$$

Dla płyt grubych (krótkich fal) równania przechodzą w postać fali Rayleigha.

Rodzaje przemieszczeń generowanych przez fale Lamba odpowiadają określonym modom falowym typu symetrycznego i asymetrycznego. Istnieje duża liczba takich modów zależnie od grubości płyty i częstotliwości. Różnią się one między sobą prędkościami fazowymi i ściśle ich opis można podać poprzez krzywe dyspersyjne reprezentujące każdy z nich S_0 , A_0 , S_1 , A_1 itd.



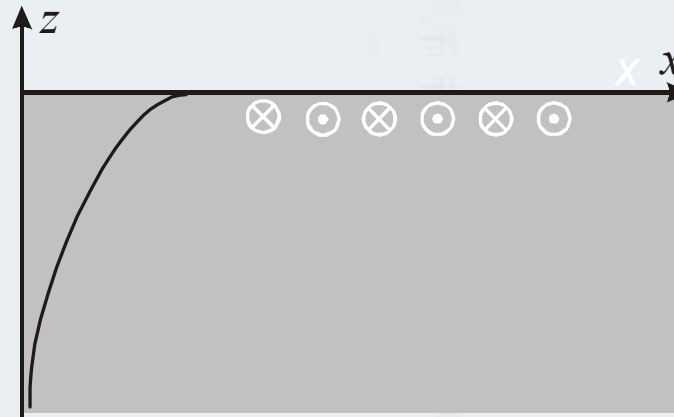
W płytach mogą też rozchodzić się, podobnie jak fale Lamba, symetryczne i asymetryczne mody poprzeczne.



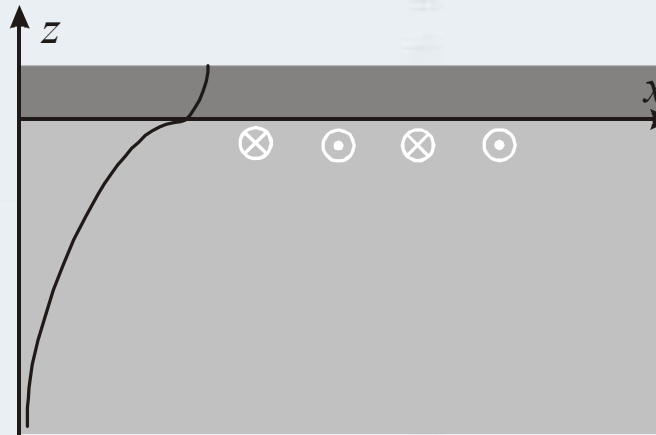
W podobny sposób można poszukiwać fal w różnych ośrodkach.

W podobny sposób można poszukiwać fal w różnych ośrodkach.
Do dobrze poznanych rozwiązań zaliczyć należy:

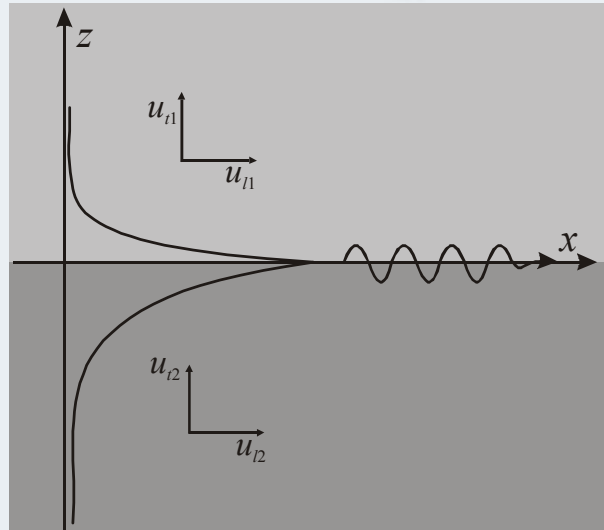
Fale poprzeczne



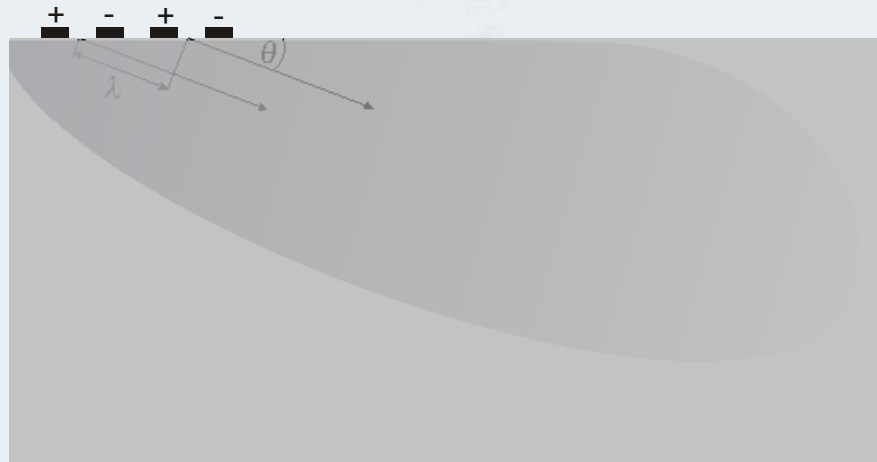
Fale Love'a



Fale Stonley'a



SSBW

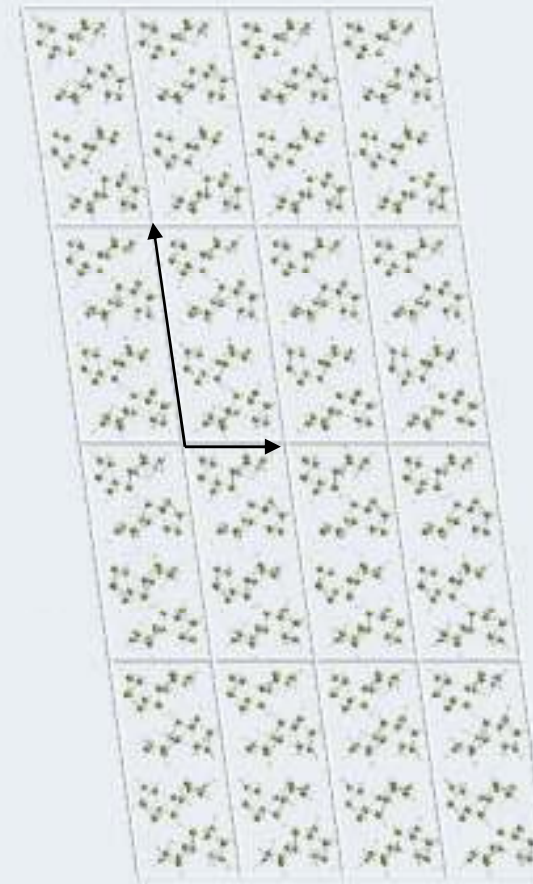
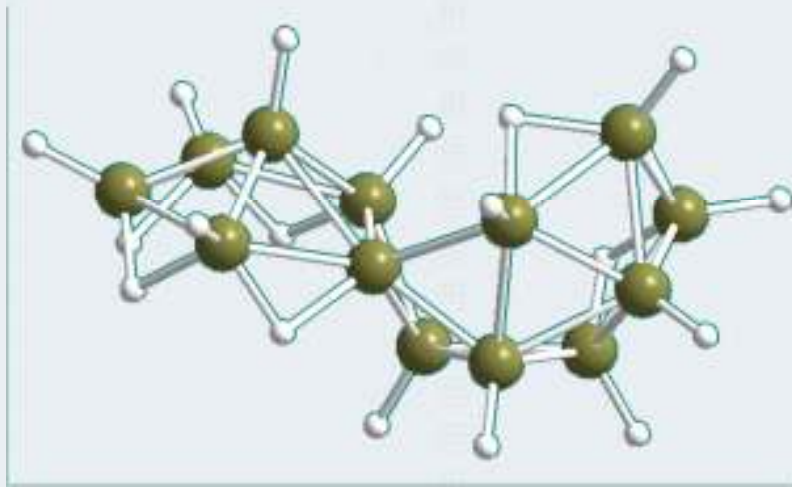


Elementy krystalografii

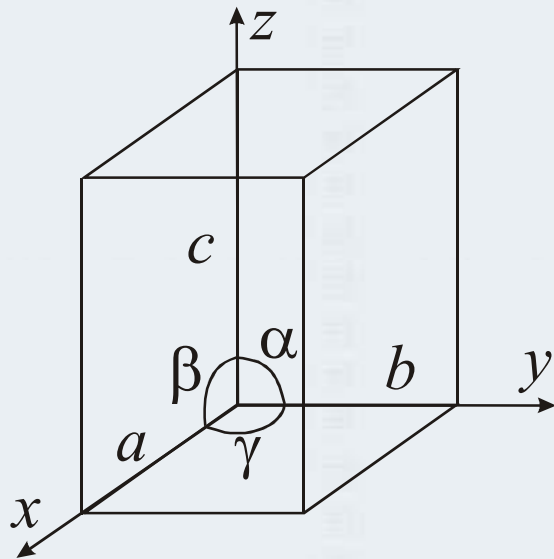
Piezoelektryczność, ferroelektryczność i elektrostrykcja

κρύσταλλος - lód

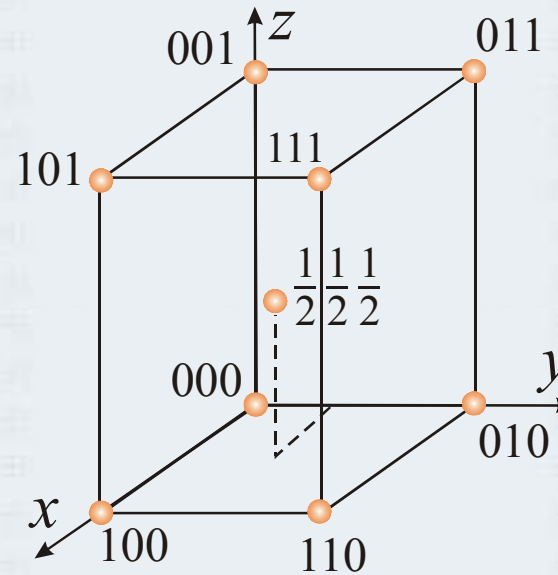
Kryształ to stan skupienia materii, w którym cząsteczki, atomy lub jony zajmują ściśle określone miejsca w przestrzeni i mogą jedynie drgać tylko w obrębie tychże miejsc. W odróżnieniu od ogólnie rozumianego ciała stałego (np. ciała amorficznego) kryształy posiadają określoną symetrię.



Układ krystalograficzny opisuje się często za pomocą sieci Bravais'a wypełniając przestrzeń przez wielokrotne powtarzanie translacji tzw. komórki elementarnej. Sieci Bravais uzyskiwane są przez złożenie 7 systemów krystalograficznych i 4 sposobów centrowania. Spośród teoretycznie możliwych 28 (7x4) sposobów złożenia w naturze występuje tylko 14.

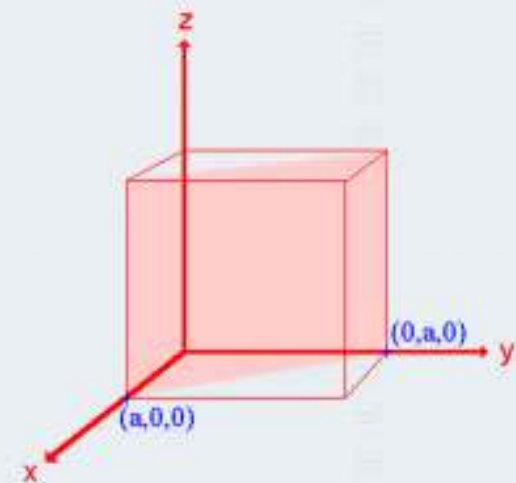
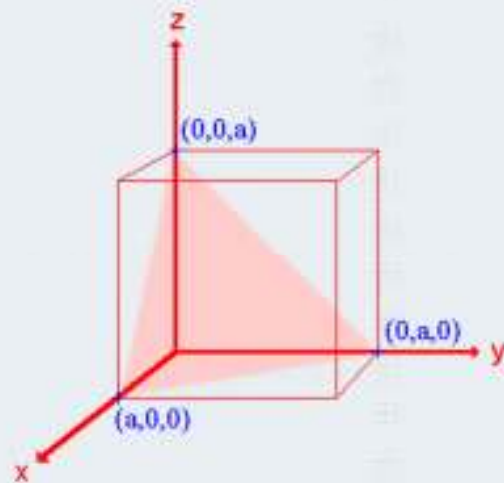
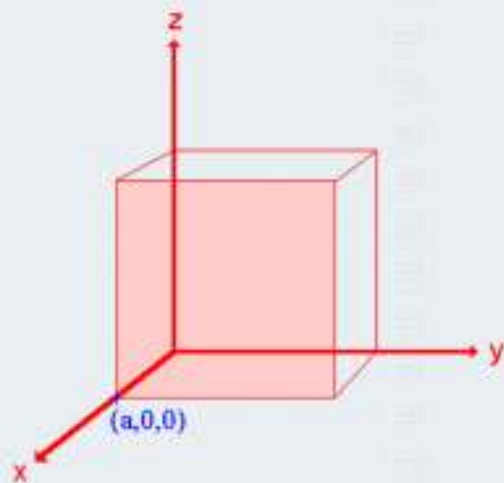


Komórka elementarna
osie krystalograficzne
stałe sieciowe



Sieć przestrzenna
wskaźniki węzłów sieci

Wskaźniki Millera



UKŁADY KRYSTALOGRAFICZNE

układ regularny (sześcienny) $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ (sól kamienna, diament)

układ tetragonalny $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ (kasyteryt, cyrkon, wezuwian)

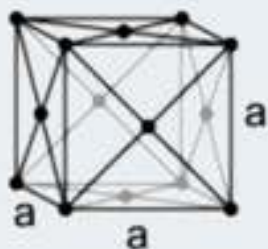
układ heksagonalny $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ (beryl, apatyt, grafit)

układ trygonalny $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ (kalcyt, korund, kwarc)

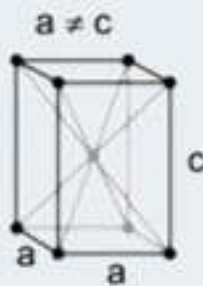
układ rombowy $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ (siarka, oliwin, struwit)

układ jednoskośny $a \neq b \neq c$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$ (gips, ortoklaz)

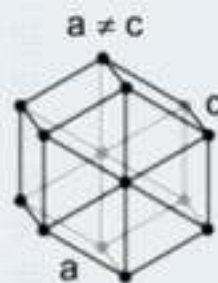
układ trójskośny $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ (cyanit, aksynit)



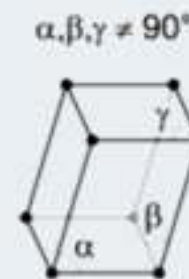
regularny (kubiczny)



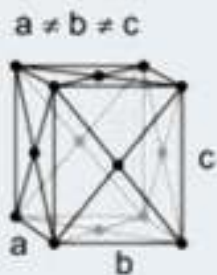
tetragonalny



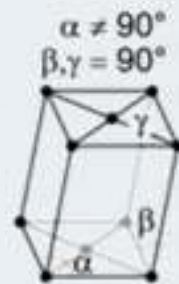
heksagonalny



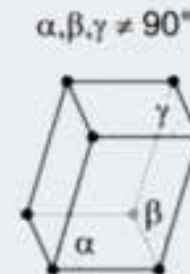
trygonalny



rombowy



j jednoskośny

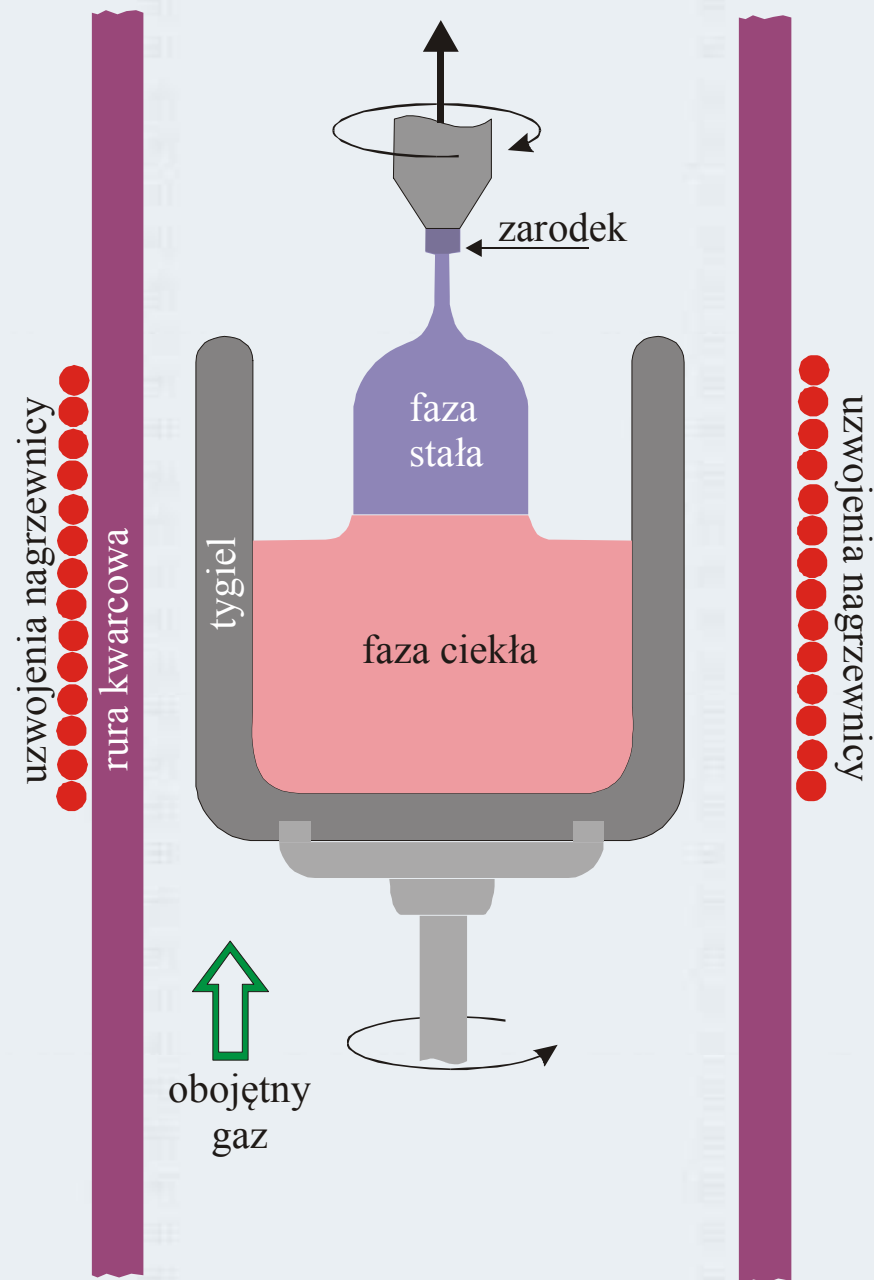


trójskośny

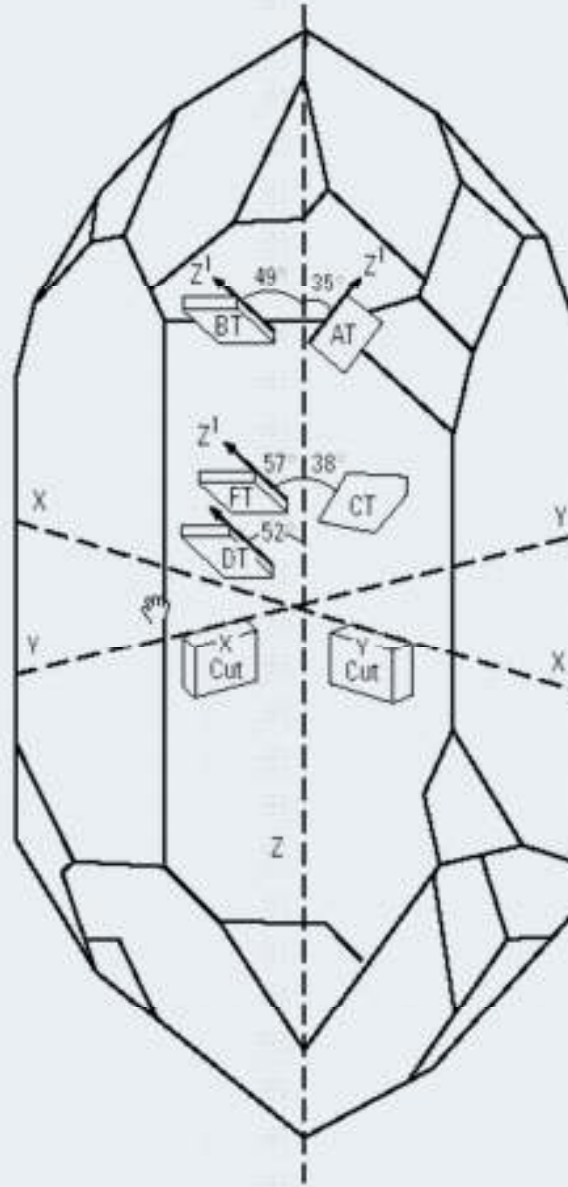
Najszlęnniejsze polskie nazwisko
w świecie techniki

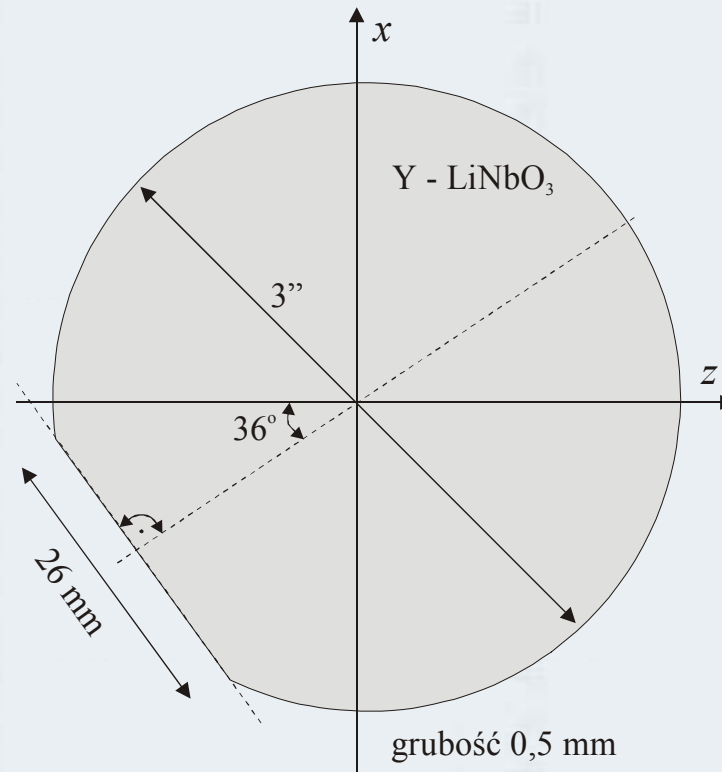


Prof. Jan Czochralski
1885-1953



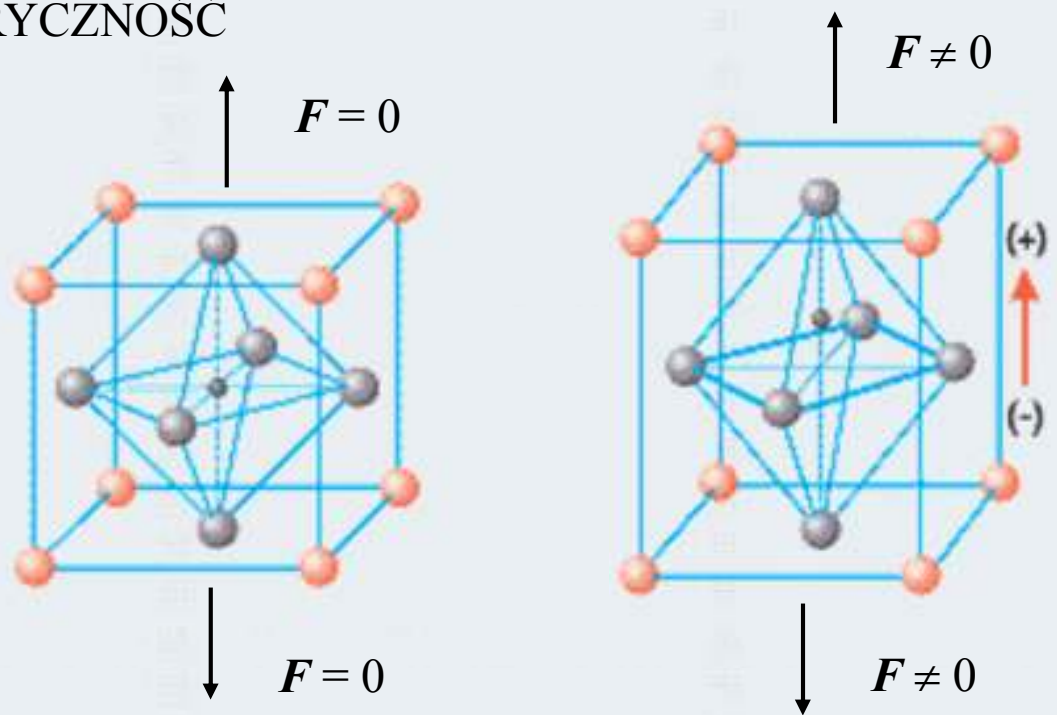
„Wyciąganie” monokryształu z fazy ciekłej metodą Czochralskiego.





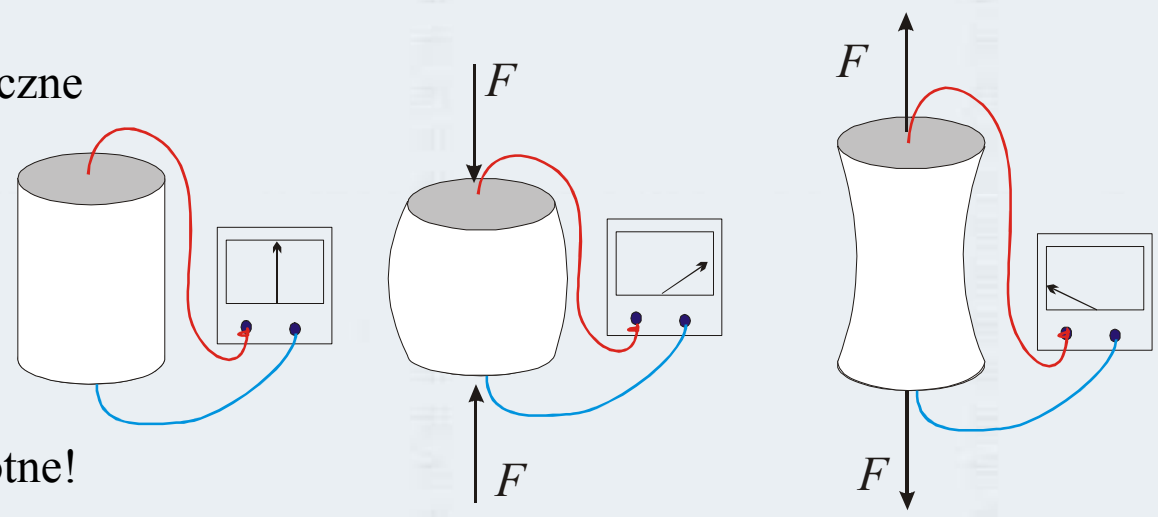
czystość kryształu
 liczba wakansów na jedn. obj.
 rozrzut grubości mierzony w czterech punktach i w środku płytki
 promień krzywizny płytki
 niejednorodności powierzchni

PIEZOELEKTRYCZNOŚĆ



SiO₂ LiNbO₃ LiTaO₃ BaTiO₃ SrTiO₃ Pb(ZrTi)O₃ KNbO₃ KNaC₄H₄O₆·4H₂O

Proste zjawisko piezoelektryczne



Zachodzi też zjawiska odwrotne!

Prawo Hook'a dla piezoelektryka należy uzupełnić o siły wynikające z piezoeфекtu

$$T_{ij} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k$$

C_{ijkl}^E tensor stałych sprężystych przy stałym natężeniu pola elektrycznego E

e_{ijk} tensor piezoelektryczny wiążący pole elektryczne z polem odkształceń

Wektor indukcji elektrycznej D , zwykle zależny tylko od wektora natężenia pola elektrycznego E i tensora przenikalności elektrycznej.

W materiałach piezoelektrycznych zależy również od tensora deformacji :

$$D_i = \varepsilon_{ij}^S E_j + e_{ijk} S_{jk}$$

ε_{ij}^S tensor przenikalności elektrycznej przy stałej deformacji

Wektor indukcji elektrycznej D można też wyrazić poprzez tensor naprężeń:

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij}^T E_j + \sum_{j,k} d_{ijk} T_{jk}$$

ε_{ij}^T tensor przenikalności elektrycznej przy stałym naprężeniu

d_{ijk} tensor podatności piezoelektrycznej.

Wyprowadzone wcześniej równanie ruchu jest spełnione także w ośrodkach piezoelektrycznych jednakże z uwzględnieniem towarzyszących deformacji wektora natężenia pola elektrycznego. Wektor ten, ze względu na fakt, że fale sprężyste propagują się znacznie wolniej niż elektromagnetyczne ($\sim 10^5$ razy) można w przybliżeniu uznać za niezmienny, co upoważnia do wyrażenia go poprzez gradient potencjału:

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Po wstawieniu tego gradientu i naprężeń do równania ruchu otrzymuje się równanie ruchu dla ośrodka piezoelektrycznego w postaci:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - C_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - e_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

Ponieważ piezoelektryk jest równocześnie dielektrykiem (używa się też określenia piezodielektryk) czyli ośrodkiem nie zawierającym ładunków swobodnych to:

$$\mathit{div} \mathbf{D} = 0$$

Biorąc powyższe pod uwagę i wykorzystując wyrażenie na indukcję elektryczną w piezoelektryku otrzymamy:

$$\epsilon_{ij}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - e_{ijk} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

co daje układ 4 równań na przemieszczenia i potencjał, który w przestrzeni swobodnej musi też spełniać równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Seignetto-elektryczność, lub ferroelektryczność - elektryczny odpowiednik ferromagnetyzmu

Ferroelektryki charakteryzują się strukturą domenową, tj. posiadają obszary gdzie elementarne momenty dipolowe są ustawione zgodnie. Dlatego poniżej pewnej temperatury (tzw. Temperatury Curie), gdy ruchy termiczne nie burzą tego uporządkowania, zachowują się one podobnie jak ferromagnetyki. Zjawisko to wykryto po raz pierwszy w soli Seignetta. Najbardziej rozpowszechnionym obecnie ferroelektrykiem jest BaTiO_3 .

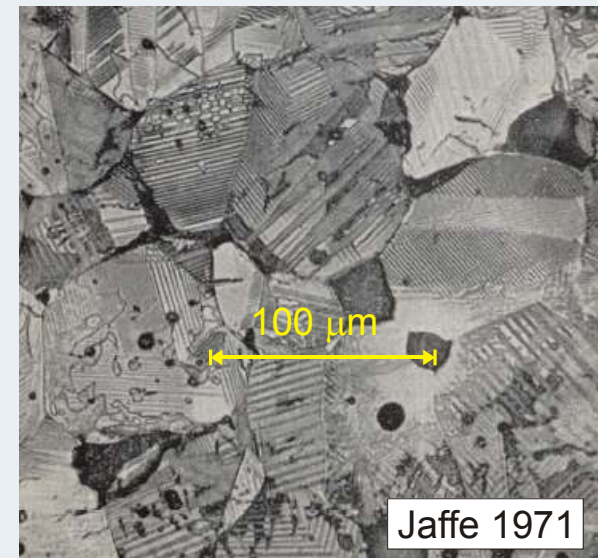
Zależność przenikalności elektrycznej od temperatury dla ferroelektryka jest następująca:

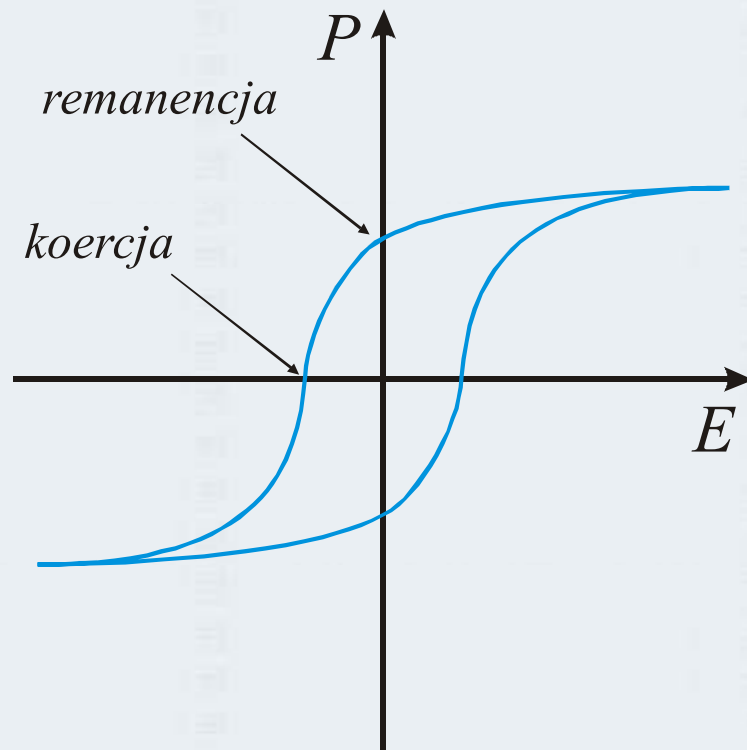
$$\varepsilon - 1 = \frac{C}{T - T_C}$$

Zależność ta nosi nazwę prawa Curie-Weissa.

Dla tytanianu baru ferroelektryczność zanika powyżej temperatury $T=485 \text{ K}$, a stała $C = 1.8 \cdot 10^5 \text{ K}$.

Ferroelektryki charakteryzują się bardzo dużą przenikalnością elektryczną nawet rzędu 100 000.

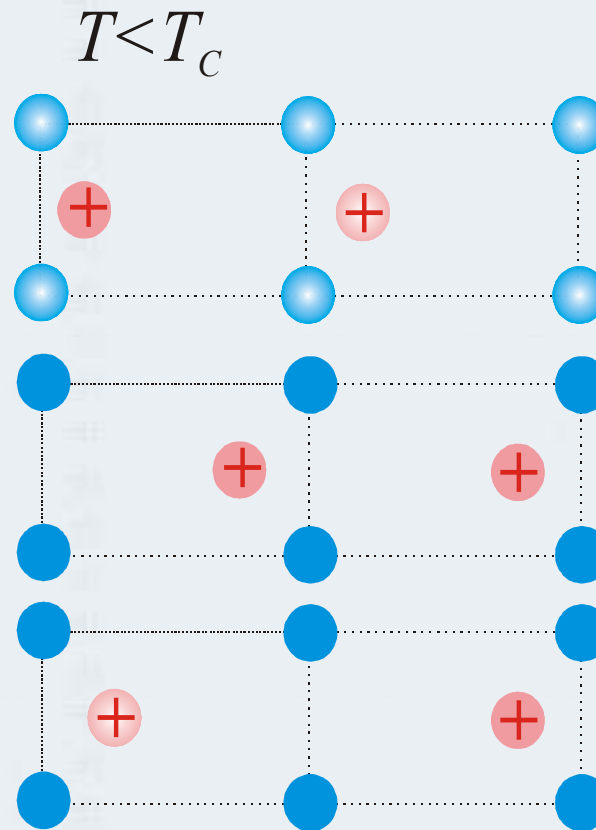
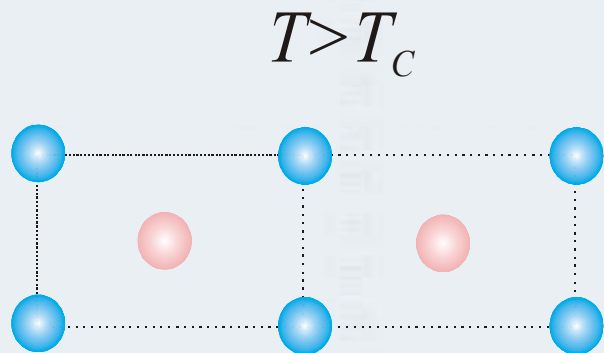




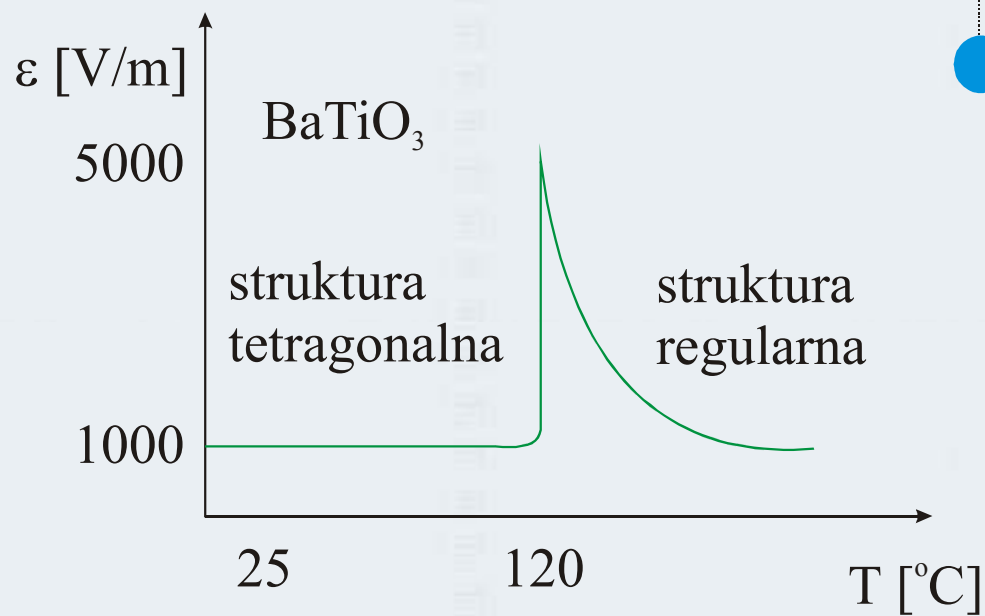
BaTiO ₃	(408K)
KNbO ₃	(708K)
PbTiO ₃	(765K)
LiTaO ₃	(938K)
LiNbO ₃	(1480K)

Wszystkie ferroelektryki są piroelektrykami i piezoelektrykami – jednak nie odwrotnie.

Zjawisku zmiany polaryzacji często towarzyszy zmiana objętości kryształu.



antyferroelektryk



w rzeczywistości przemian jest więcej

$T > 120$ °C – regularna

5 °C $< T < 120$ °C – tetragonalna

-90 °C $< T < 5$ °C – jednoskośna

$T < -90$ °C - rombowa

Piroelektryk jest ferroelektrykiem o bardzo wysokiej temperaturze Curie nie obserwuje się go w stanie paraelektrycznym (niespolaryzowanym) do zmiany jego polaryzacji niezbędne jest bardzo silne pole elektryczne lub wysoka temperatura.

Efekt piroelektryczny polega na powstawaniu ładunków elektrycznych na powierzchni kryształów dielektrycznych pod wpływem zmiany ich temperatury.

(gdy podczas ogrzewania jeden koniec pręta piroelektryka staje się dodatni, a drugi ujemny, to przy ochładzaniu zajdzie zjawisko odwrotne);

wartość ładunku piroelektrycznego zależy od szybkości zmian temperatury i zwykle wynosi ok. 10-15 C/cm²/°C).

Efekt odwrotny nosi nazwę efektu elektrokalorycznego

Elektrostrykcja jest efektem polegającym na zmianie rozmiarów kryształu pod wpływem pola elektrycznego. Odwrócenie kierunku pola nie skutkuje odwróceniem deformacji.

Zmiana rozmiarów jest zwykle niewielka i spowodowana reorientacją molekuł.

Współczynnik deformacji (elektrostrykcyjny) jest tensorem 4-tej walencji:

$$S_{ij} = Q_{ijkl} \times P_k \times P_l$$

P_i są wektorami polaryzacji

Zjawiska sprzężone

odpowiedź w postaci zmiany	wymuszenie			
	siła	ciepło	E statyczne	H statyczne
rozmiaru lub kształtu	sprężystość	rozszerzalność cieplna	piezoelektryczność odwrotna	piezomagnetyzm odwrotny
			elektrostrykcja (odwrotność piroelektryczności)	magnetostrykcja (odwrotność magnetosprężystości)
temperatury	piezokaloryczność	pojemność cieplna	elektrokaloryczność (odwrotność piroelektryczności)	magnetokaloryczność (odwrotność piromagnetyzmu)
polaryzacji elektrycznej	piezoelektryczność prosta	piroelektryczność (odwrotność elektrokaloryczności)	polaryzacja elektryczna	nie obserwowany
	elektrosprężystość (odwrotność elektrostrykcji)			
namagnesowania	piezomagnetyzm prosty	piromagnetyzm (odwrotność magnetokaloryczności)	nie obserwowany	namagnesowanie
	magnetosprężystość (odwrotność magnetostrykcji)			